

Ein Optimierungsproblem für stationäre Operatorfolgen

von
Friedrich Graef
aus
Schwabach

1976 № 143

Ein Optimierungsproblem für stationäre Operatorfolgen

Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt

von

Friedrich Graef

aus

Schwabach



Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaftlichen Fach-
bereichen der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 4. Februar 1976

Vorsitzender der Promotionskommission: Professor Dr. H. Behrens

Erstberichterstatte: Professor Dr. B. Dejon

Zweitberichterstatte: Professor Dr. D. Kölzow

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	iii
Teil I Das Optimierungsproblem	1
§ 1 Vielfachübertragung Puls-Amplitudenmodulierter Signale	1
§ 2 Hilfsmittel aus Funktionalanalysis und Wahrscheinlichkeitstheorie	5
§ 3 Beschreibung des Modells	13
§ 4 Das Optimierungsproblem	27
Teil II Spektraldarstellung und Filterung stationärer Folgen von Hilbert-Schmidt-Operatoren	29
§ 5 Spektraldarstellung einer stationären Folge von Hilbert-Schmidt-Operatoren	29
§ 6 Der Raum $L^2_{C_x}$	36
§ 7 Filterung stationärer Folgen von Hilbert-Schmidt-Operatoren	45
§ 8 Der Übertragungsfehler in Spektraldarstellung. Optimales Empfangsfilter	52
Teil III Das Optimierungsproblem in Spektraldarstellung	65
§ 9 Die Optimierungsaufgabe	65
§ 10 Das diskrete Optimierungsproblem unter globaler Beschränkung. Notwendige Bedingungen für ein Maximum	69
§ 11 Hinreichende Bedingungen für die Lösbarkeit des diskreten Optimierungsproblems	80

§ 12	Das skalare Optimierungsproblem	89
§ 13	Beispiel: Optimale Signalformen bei der Puls-Amplituden-Modulation	96
	Literatur	100
	Verzeichnis der Abkürzungen	102

Einleitung

Das Problem der optimalen Vielfachübertragung Puls-Amplituden-modulierter Signale, wie es in § 1 dieser Arbeit beschrieben wird, wurde von Dejon und Hänsler [1] unter den vereinfachenden Annahmen gelöst, daß die Eingangssignale einen stationären Vektorprozeß bilden, dessen Spektraldichtematrix bei jeder Frequenz nur einen Eigenwert besitzt, und daß der Übertragungskanal durch "stark farbiges" Rauschen gestört wird. Die präzise mathematische Natur der Impulsantworten, die Sende- und Empfangsfilter des Übertragungssystems charakterisieren, wurde dabei außer acht gelassen; ebenso die der im Übertragungskanal auftretenden stochastischen Prozesse.

In der vorliegenden Arbeit wird ein exaktes mathematisches Modell des Übertragungssystems erarbeitet, in dem dieses Problem unter weniger restriktiven Annahmen als bei Dejon und Hänsler gelöst werden kann.

Als wichtigste Ergebnisse erhalten wir dabei:

Das Modell erlaubt eine präzise und gegenüber [1] allgemeinere Beschreibung des Rauschens (Definition 3.10) und die Berücksichtigung des Falls abzählbar unendlich vieler Eingangssignale (Definition 3.1).

Sende- und Empfangsfilter können durch Spektralfunktionen, d.h. operatorwertige Abbildungen charakterisiert werden (Satz 7.1). Diese Darstellung liefert in Satz 8.1 die Existenz eines optimalen Empfangsfilters zu fest vorgegebenem Sendefilter. Die explizite Berechnung der zugehörigen Spektralfunktion in Satz 8.10 stellt eine Erweiterung der

Wienerschen Ergebnisse [13] über die optimale Filterung stationärer Prozesse auf stationäre Operatorfolgen dar. Die Charakterisierung eines optimalen Sendefilters bei globaler Leistungsbeschränkung durch die Vertauschbarkeit bestimmter Operatoren in Satz 10.5 führt direkt zu Satz 11.6 über die Existenz eines solchen bei beliebiger Spektraldichtematrix der Eingangssignale. Auch die Voraussetzung 11.1 über das Rauschen ist dabei weniger restriktiv als in [1] und in allen praktisch relevanten Fällen erfüllt. Bei "weißem Rauschen" erhalten wir in Satz 11.8 außerdem eine Lösung für den Fall, daß die Eingangssignale in ihrer Leistung einzeln oder gruppenweise beschränkt sind.

Die Arbeit gliedert sich in drei große Abschnitte. In Teil I entwickeln wir aus dem Modell des Übertragungssystems nach Dejon und Hänsler [1], wie es in § 1 beschrieben wird, ein allgemeineres, in dem Signale und Rauschen durch stationäre Folgen von Hilbert-Schmidt-Operatoren repräsentiert werden (§ 3). Wir benutzen dabei wesentlich die Arbeiten von Payen [9] über hilbertraumwertige stochastische Prozesse und von Gelfand, Vilenkin [4] über nukleare Räume und verallgemeinerte stochastische Prozesse. Die für unser Vorhaben wichtigen Begriffe und Sätze aus [9] und [4] sind in § 2 zusammengestellt. Durch geeignete Wahl des Definitionsbereichs dieser Operatoren läßt sich mit dieser Darstellung auch der Grenzfall abzählbar unendlich vieler Eingangssignale erfassen (Definition 3.1).

In Satz 3.8 erhalten wir eine Charakterisierung von Filtern durch Hilbert-Schmidt-Operatoren in Räumen, die durch die obigen Operatorfolgen festgelegt sind.

Daraus ergibt sich in § 4 der Übertragungsfehler in Abhängigkeit von Sende- und Empfangsfilter als Funktional über Mengen von Hilbert-Schmidt-Operatoren.

Ausgehend von der Integrationstheorie für operatorwertige Maße nach Mandrekar, Salehi [6,7], Masani [8] und Welch [12] erhalten wir im zweiten Teil eine "Spektraldarstellung" für Filter durch operatorwertige Funktionen auf einem Intervall der reellen Zahlenachse, deren Gesamtheit, versehen mit einem geeigneten inneren Produkt, einen Hilbertraum bildet.

Die Sätze 7.3 und 7.4 über die Hintereinanderschaltung von Filtern und die Additivität eines Filters bezüglich der Summe zweier orthogonaler stationärer Operatorfolgen erlauben in § 8 die Darstellung des Übertragungsfehlers in Abhängigkeit von den Spektralfunktionen.

Bei fest vorgegebenem Sendefilter erweist sich dieser Fehler als strikt positives quadratisches Funktional auf dem Hilbertraum aller (Spektralfunktionen von) Empfangsfiltern, so daß die Existenz eines optimalen Empfangsfilters zu diesem Sendefilter gesichert ist (Satz 8.1).

Die explizite Form seiner Spektralfunktion wird unter einer Zusatzvoraussetzung 8.2 in Satz 8.10 bestimmt.

Der letzte Teil ist der Bestimmung des optimalen Sendefilters gewidmet.

Nach Einsetzen des optimalen Empfangsfilters in das Fehlerfunktional erhält man ein nichtlineares Funktional auf der Menge aller (Spektralfunktionen von) Sendefiltern, welches unter gewissen "Leistungsbeschränkungen" zu minimieren ist (§ 9).

Das von Dejon und Hänsler ermittelte Fehlerfunktional ist dabei ein Spezialfall des obigen, da in [1] die Voraussetzungen an die Eingangssignale und das Rauschen strenger sind.

Wir ermitteln zunächst notwendige Bedingungen, die ein optimales Sendefilter erfüllen muß (Satz 10.5) und erhalten daraus in Satz 10.7 eine Aussage über die allgemeine Struktur des Optimums.

Dies führt uns direkt zu der Voraussetzung 11.1, unter der wir die Existenz eines optimalen Sendefilters unter "globaler Leistungsbeschränkung" (Satz 11.6) und unter "Einzelleistungsbeschränkungen" (Voraussetzung 11.7, Satz 11.8) nachweisen. Die explizite Berechnung der entsprechenden Spektralfunktion wird in § 12 vorgenommen.

In § 13 schließlich wird gezeigt, wie sich optimale Impulsantworten für das Übertragungssystem aus § 1 berechnen lassen.

Ich danke Herrn Prof. Dr. B. Dejon für die Anregungen und Ratschläge, mit denen er diese Arbeit unterstützt hat.

Bezeichnungen

Eine Liste der häufig verwendeten Abkürzungen und Bezeichnungen mit den Seitenangaben ihrer Definition befindet sich auf Seite 102f. Vorab einige Vereinbarungen:

Abbildungen werden entweder durch Angabe von Definitions- und Wertebereich festgelegt: $A: X \longrightarrow Y$ ist eine Abbildung der Menge X in die Menge Y ; oder durch elementweise Zuordnung, falls die Bereiche aus dem Zusammenhang bekannt sind: $x \longmapsto Ax$ bezeichnet die Abbildung, die jedem $x \in X$ das Element $Ax \in Y$ zuordnet.

Ist die Indexmenge I einer indizierten Familie $(x_i)_{i \in I}$ von Elementen $x_i \in X$ aus dem Zusammenhang klar ersichtlich, so schreiben wir (x_i) anstelle von $(x_i)_{i \in I}$ und $\sum_i x_i$ anstelle von $\sum_{i \in I} x_i$.

Numerierung

Wesentliche Definitionen, Lemmata, Sätze und Beispiele sind innerhalb jedes Paragraphen fortlaufend durchnummeriert, ebenso häufig benötigte Formeln. Bei Rückverweisungen im § n ist Satz $k.1$ der Satz Nr. 1 aus § k und $(k.1)$ die Formel (1) aus § k usw. Satz 1 bzw. Formel (1) verweist auf die entsprechenden Nummern im § n selbst.

Teil I Das Optimierungsproblem

§ 1 Vielfachübertragung Puls-Amplituden-modulierter Signale

Das Optimierungsproblem, das in dieser Arbeit behandelt wird, stellt eine Verallgemeinerung und gleichzeitig strenge mathematische Fassung des folgenden Problems aus der Theorie der Nachrichtenübertragung dar:

M zeitdiskrete Signale - darunter verstehen wir im weiteren Sinne stationäre und stationär korrelierte Folgen $(\mathfrak{J}_k^{(m)})_{k \in \mathbb{Z}}$ $1 \leq m \leq M$, von Zufallsvariablen - sollen über einen Übertragungskanal gesendet werden, der jedoch nur zur Übertragung zeitkontinuierlicher Signale, d.h. stochastischer Prozesse $w(t), t \in \mathcal{R}$, geeignet ist. Deshalb werden die zeitdiskreten Signale zunächst "Puls-Amplituden-moduliert", d.h. mit Hilfe vorgegebener fester Signalformen (= Funktionen) $g_m(t), t \in \mathcal{R}$, werden die zeitkontinuierlichen Signale

$$(1) \quad \mathfrak{J}_k^{(m)} g_m(t) \quad k \in \mathbb{Z}, t \in \mathcal{R}$$

gebildet und in Abständen von T Sekunden gesendet. Durch zeitliche Überlagerung der einzelnen Signale entsteht dabei

$$(2) \quad w_m(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{J}_k^{(m)} g_m(t - kT)$$

Um in dieser einleitenden Beschreibung nicht bereits Konvergenzfragen behandeln zu müssen, nehmen wir an, daß die Funktionen g_m stetig und für genügend große $|t|$ identisch Null sind, so daß die Summe (2) eine endliche ist.

Da nur ein einziger Übertragungskanal zur Verfügung steht, müssen die Einzelsignale $w_m(t)$ überlagert werden. Wir nehmen an, daß diese Überlagerung eine additive ist, und erhalten so am Kanaleingang das Sendesignal

$$(3) \quad w(t) = \sum_{m=1}^M w_m(t)$$

Im Übertragungskanal wird das Signal $w(t)$ durch ein Störsignal ("Rauschen") verändert. Am Kanalausgang erhält man nicht mehr $w(t)$, sondern das gestörte Signal

$$(4) \quad z(t) = w(t) + n(t) ,$$

wobei $n(t)$ ein den Kanal charakterisierender (u.U. verallgemeinerter) stochastischer Prozeß ist. Seine Eigenschaften werden später noch anzugeben sein.

Aus dem gestörten Signal werden M zeitdiskrete Signale

$(\tilde{J}_k^{(m)})_{k \in \mathbb{Z}}$ auf die folgende Weise extrahiert:

Zunächst wird $z(t)$ mit Impulsantworten $h_m(t)$ auf M verschiedene Arten linear demoduliert:

$$(5) \quad y_m(t) = \int z(\tau) h_m(t-\tau) d\tau$$

und diese Signale $y_m(t)$ dann zu den Zeitpunkten kT , $k \in \mathbb{Z}$, abgetastet:

$$(6) \quad \tilde{J}_k^{(m)} = y_m(kT)$$

Die Frage, in welchem Sinn das Integral (5) zu verstehen ist, soll erst nach Angabe der Eigenschaften des Störsignals geklärt werden.

Die Figur auf Seite 4 zeigt ein Schema des gesamten Übertragungssystems.

Das Optimierungsproblem besteht darin, die Funktionen g_m und h_m so zu bestimmen, daß die Folgen $(\tilde{J}_k^{(m)})$ die Eingangssignale $(J_k^{(m)})$ möglichst gut approximieren. Als Fehlermaß verwenden wir dazu die Größe

$$(7) \quad D^2 = \sum_{m=1}^M \mathcal{E} |\tilde{J}_k^{(m)} - J_k^{(m)}|^2$$

die sich als vom Zeitpunkt k unabhängig erweisen wird.

($\mathcal{E}$ bedeutet dabei den Erwartungswert bezüglich des zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsmaßes. $\mathcal{E} |x(s)|^2$ kann als Leistung des Signals $x(s)$ zum Zeitpunkt s interpretiert werden.) Es ist intuitiv klar, daß dieser

Fehler um so kleiner wird, je mehr Energie in die Sendesignale w_m gesteckt wird; denn dadurch wird der relative Einfluß des Störsignals geringer. Die Optimierung des Funktionals D^2 wird also unter Leistungsbeschränkungen erfolgen. Wir betrachten dabei zwei Möglichkeiten:

- a) Die mittlere Leistung jedes der Sendesignale $w_m(t)$ über das Zeitintervall $[0, T]$ ist beschränkt (Einzelleistungsbeschränkung):

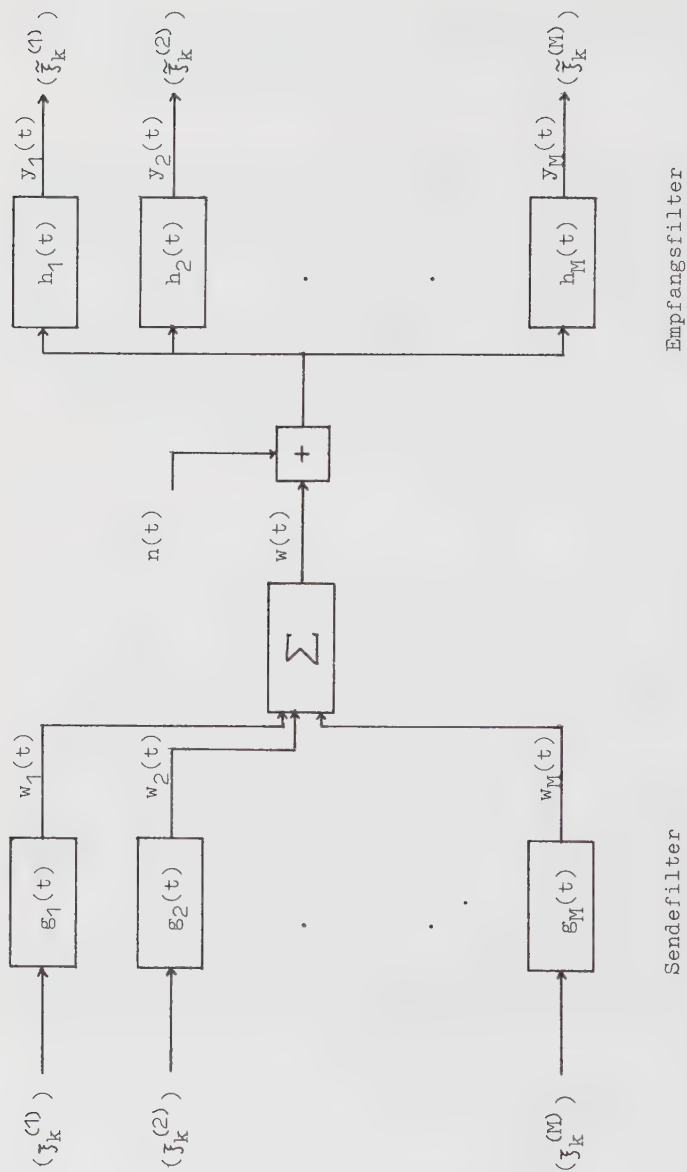
$$(8) \quad \int_0^T \mathcal{E} |w_m(t)|^2 dt \leq \beta_m$$

- b) oder die gesamte Sendeenergie ist durch β beschränkt und die Verteilung der Leistung auf die einzelnen Signale ist ein Teil des Optimierungsproblems (globale Leistungsbeschränkung):

$$(9) \quad \int_0^T \mathcal{E} |w(t)|^2 dt \leq \beta$$

Dejon und Hänsler [1] haben das Problem b) unter sehr einschränkenden Voraussetzungen über die Signale ($f_k^{(m)}$) und das Störsignal $n(t)$ gelöst.

In der vorliegenden Arbeit werden die im Übertragungsschema auftretenden stochastischen Prozesse als Spezialfälle von Folgen verallgemeinerter Zufallsgrößen aufgefaßt und es wird gezeigt, daß die Transformationen stochastischer Prozesse, die die Namen "Puls-Amplituden-Modulation" und "Demodulation und Abtastung" tragen, unter den allgemeineren Begriff der Filterung stationärer Folgen verallgemeinerter Zufallsgrößen subsummiert werden können. Das Optimierungsproblem wird dann in diesem weiter gespannten Rahmen und unter allgemeineren Voraussetzungen gelöst. Insbesondere ist darin die Erweiterung auf das Übertragen von abzählbar unendlich vielen Signalen enthalten.



Sendefilter

Empfangsfilter

Schema des Übertragungssystems

§ 2 Hilfsmittel aus Funktionalanalysis und Wahrscheinlichkeitstheorie

Dieser Abschnitt enthält eine Zusammenstellung von Definitionen und Sätzen, die im folgenden häufig benötigt werden. Für die Beweise sei auf Dunford-Schwartz [3], Gelfand-Vilenkin [4], Schatten [11] und die Arbeit von Payen [9] verwiesen.

Summierbarkeit über beliebige Indexmengen

Eine Familie $(f_j)_{j \in J}$ von Elementen eines linearen normierten Raums X heißt summierbar mit Summe $f := \sum_{j \in J} f_j \in X$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge J_ε von J gibt, so daß für jede J_ε umfassende endliche Teilmenge J_1 von J gilt:

$$\| f - \sum_{j \in J_1} f_j \| < \varepsilon$$

Hilbert-Schmidt-Operatoren (Dunford-Schwartz [3], Gelfand-Vilenkin [4], Schatten [11])

Seien H_i ; $i = 1, 2$; Hilberträume mit inneren Produkten $(\cdot, \cdot)_i$ und Normen $\| \cdot \|_i$. Wir nehmen die Gültigkeit des Auswahlaxioms und somit die Existenz von vollständigen Orthonormalsystemen in den H_i an.

Ein beschränkter linearer Operator $A: H_1 \rightarrow H_2$ heißt Hilbert-Schmidt-Operator (und wird im folgenden kurz HS-Operator genannt), wenn die Familie $(\|Ae_i\|_2^2)_{i \in I}$ für ein beliebiges vollständiges Orthonormalsystem $(e_i)_{i \in I}$ von H_1 summierbar ist. Ihre Summe ist eine von der speziellen Wahl des Orthonormalsystems unabhängige nicht negative reelle Zahl, so daß

$$(1) \quad \|A\|_{HS} := \sqrt{\sum_{i \in I} \|Ae_i\|_2^2}$$

wohldefiniert ist. Für zwei HS-Operatoren $A: H_1 \longrightarrow H_2$ und $B: H_1 \longrightarrow H_2$ existiert die Summe

$$(2) \quad \langle A, B \rangle_{HS} := \sum_{i \in I} (\langle A e_i, B e_i \rangle_2)$$

und ist ebenfalls unabhängig von der Wahl des vollständigen Orthonormalsystems $(e_i)_{i \in I}$ von H_1 .

Lemma 1 Die Menge $HS(H_1, H_2)$ der HS-Operatoren $A: H_1 \longrightarrow H_2$, versehen mit den üblichen Operationen der Addition und skalaren Multiplikation sowie dem durch (2) gegebenen inneren Produkt, ist ein Hilbertraum mit den folgenden Eigenschaften:

- (3) $A \in HS(H_1, H_2) \Rightarrow A^* \in HS(H_2, H_1)$ und es gilt
 $\|A\|_{HS} = \|A^*\|_{HS}$ sowie $\langle A^*, B^* \rangle_{HS} = \langle B, A \rangle_{HS}$
 für $A, B \in HS(H_1, H_2)$ +)
- (4) Ist H_3 ein weiterer Hilbertraum und sind $X: H_2 \longrightarrow H_3$ sowie $Y: H_3 \longrightarrow H_1$ lineare beschränkte Operatoren, so gilt:
 $A \in HS(H_1, H_2) \Rightarrow XA \in HS(H_1, H_3)$, $AY \in HS(H_3, H_2)$ und
 $\langle XA, B \rangle_{HS} = \langle A, X^*B \rangle_{HS}$ für $B \in HS(H_1, H_3)$ sowie
 $\langle AY, B \rangle_{HS} = \langle A, BY^* \rangle_{HS}$ für $B \in HS(H_3, H_2)$.
- (5) Sind U und V unitäre Operatoren in H_1 bzw. H_2 und A aus $HS(H_1, H_2)$, so ist $\|VAU\|_{HS} = \|A\|_{HS}$.
- (6) Ist $\|A\| := \sup \{ \|Ax\|_2 ; \|x\|_1 \leq 1 \}$ die gleichmäßige Norm eines linearen beschränkten Operators und $A \in HS(H_1, H_2)$, so gilt $\|A\| \leq \|A\|_{HS}$.

+) Wir werden die Normen und inneren Produkte verschiedener Räume von HS-Operatoren stets nur mit $\|\cdot\|_{HS}$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_{HS}$ bezeichnen, da die Information über die Räume bereits in den Operatoren steckt.

Lemma 2 Jeder HS-Operator $A: H_1 \rightarrow H_2$ ist insbesondere vollstetig und besitzt eine Darstellung

$$(7) \quad Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, x_n)_1 y_n,$$

wo $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ orthonormierte Folgen von Elementen aus H_1 bzw. H_2 und die λ_n positive reelle Zahlen mit $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$ sind und es gilt $\|A\|_{HS}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2$.

Nukleare Operatoren (Schatten [11])

Weiterhin werden auftreten Produkte $A = C^*B$ von HS-Operatoren $B: H_1 \rightarrow H_2$ und $C: H_1 \rightarrow H_1$. Operatoren $A: H_1 \rightarrow H_1$ dieser Gestalt bezeichnen wir als nukleare Operatoren und die Menge aller dieser nuklearen Operatoren mit $NK(H_1)$. Die Größe $Sp(A) := \langle B, C \rangle_{HS}$ ist unabhängig von der speziellen Produktdarstellung (auch bezüglich H_2) und heißt Spur des nuklearen Operators A .

Sei $[A]$ die positive Quadratwurzel des Operators A^*A .

Mit dieser Bezeichnung gilt:

Lemma 3 $NK(H_1)$ ist ein linearer Raum, mit A ist auch $[A]$ ein Element von $NK(H_1)$ und $\|A\|_N := Sp([A])$ ist eine Norm auf $NK(H_1)$, bezüglich der dieser Raum vollständig ist. $NK(H_1)$ besitzt die folgenden Eigenschaften:

(8) Mit A ist auch A^* aus $NK(H_1)$ und $Sp(A^*) = \overline{Sp(A)}$,

$$\|A^*\|_N = \|A\|_N.$$

(9) Jeder nukleare Operator A ist insbesondere ein HS-Operator und $\|A\|_{HS} \leq \|A\|_N$. Sind X und Y auf einem Hilbertraum H_2 definierte lineare beschränkte Operatoren mit Werten in H_1 , so ist Y^*AX aus $NK(H_2)$.

(10) Jedes $A \in NK(H_1)$ besitzt eine Darstellung

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, x_n)_1 y_n$$

mit Orthonormalsystemen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von H_1

sowie positiven reellen Zahlen λ_n mit $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$. Dabei sind die λ_n die positiven Eigenwerte des vollstetigen selbstadjungierten Operators $[A]$ zu den Eigenelementen x_n und es ist $\|A\|_N = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$.

Nukleare Räume (Gelfand-Vilenkin [4])

Ein nuklearer Raum ist ein linearer Raum Φ (über dem Körper der komplexen Zahlen) mit den folgenden Eigenschaften:

- 1) Es gibt Skalarprodukte $(\cdot, \cdot)_n: \Phi \times \Phi \longrightarrow \mathbb{C}$; $n=0, 1, 2, \dots$; mit $(\varphi, \varphi)_0 \leq (\varphi, \varphi)_1 \leq \dots$ für alle $\varphi \in \Phi$
- 2) Φ , versehen mit der Topologie, die durch die Normen $\|\varphi\|_n = \sqrt{(\varphi, \varphi)_n}$ definiert wird, ist separabel.
- 3) Seien Φ_n die Vervollständigungen des unitären Raums Φ mit den Skalarprodukten $(\cdot, \cdot)_n$. Es ist $\Phi_0 \supset \Phi_1 \supset \Phi_2 \supset \dots \supset \Phi$. Für $m \leq n$ sei

$$\begin{array}{ccc} J_m^n: \Phi_n & \longrightarrow & \Phi_m \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \end{array}$$

die kanonische Einbettung. Dann gelte:

Zu jedem $m \in \mathbb{N}_0$ gibt es ein $n \gg m$, so daß die Abbildung J_m^n ein HS-Operator ist.

Ein nuklearer Raum Φ besitzt die folgenden beiden Eigenschaften:

Lemma 4 Sei $B: \Phi \times \Phi \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform, die in beiden Variablen getrennt stetig ist. Dann gibt es Zahlen $m, n \in \mathbb{N}_0$ und einen HS-Operator $A: \Phi_m \longrightarrow \Phi_n$, so daß

$$B(\varphi, \psi) = (A\varphi, \psi)_n$$

Dabei sei φ bzw. ψ auf der rechten Seite als Element von Φ_m bzw. Φ_n aufgefaßt.

Lemma 5 Seien Φ ein nuklearer Raum und $\mathcal{Y}$ ein (komplexer) Hilbertraum und $A: \Phi \longrightarrow \mathcal{Y}$ ein linearer Operator, der bezüglich der oben definierten Topologie von Φ und der

schwachen Topologie auf Ψ stetig ist. Dann gibt es eine Zahl $p \in \mathbb{N}_0$, so daß A auf ganz Φ_p definiert und $A: \Phi_p \rightarrow \Psi$ in den jeweiligen Normtopologien ein HS-Operator ist.

Die beiden Lemmata sind Spezialfälle der Sätze 1.3.3 und 1.3.5 aus Gelfand-Vilenkin [4] .

Wichtigstes Beispiel für einen nuklearen Raum, das in der vorliegenden Arbeit verwendet wird, ist das folgende:

Es sei $I_0 = [a, b]$ ein abgeschlossenes beschränktes Intervall und K die Menge der Funktionen $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, die außerhalb des offenen Intervalls (a, b) verschwinden und Ableitungen beliebig hoher Ordnung besitzen. Die Skalarprodukte seien

$$(\varphi, \psi)_p := \sum_{q=0}^p \int_a^b \left(\frac{d^q}{dt^q} \varphi(t) \right) \overline{\left(\frac{d^q}{dt^q} \psi(t) \right)} dt$$

K , versehen mit diesen Skalarprodukten, ist ein nuklearer Raum. Die Vervollständigungen von K seien mit K_p bezeichnet. Speziell K_0 ist der Hilbertraum der Äquivalenzklassen quadratisch-Lebesgue-integrierbarer Funktionen $f: I_0 \rightarrow \mathbb{C}$

Zufallsgrößen mit Werten in einem Hilbertraum (Payen [9])

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ der Wahrscheinlichkeitsraum, der den folgenden Betrachtungen stets zugrundeliegt. Ist $(X, \mathcal{X})$ ein weiterer Meßraum, so heißen zwei meßbare Abbildungen oder Zufallsgrößen $a: \Omega \rightarrow X$ und $b: \Omega \rightarrow X$ P -äquivalent:

$a \sim b$, wenn die Menge $\{\omega \in \Omega; a(\omega) \neq b(\omega)\}$ eine P -Nullmenge ist. Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation und wenn im folgenden von Äquivalenzklassen ohne weitere Angaben gesprochen wird, so handelt es sich stets um Klassen bezüglich der Relation $\sim$. Zur Unterscheidung von Zufallsgrößen und Äquivalenzklassen sei die nachstehende Konvention eingeführt:

$a: \Omega \rightarrow X$ oder $a(\cdot)$ bedeute eine spezielle Zufallsgröße, $a(\omega)$ ihr Wert an der Stelle $\omega \in \Omega$ und für die Zufallsgröße $a(\cdot)$ sei a die Äquivalenzklasse aller $b(\cdot)$ mit $b(\cdot) \sim a(\cdot)$.

L^2 sei die Menge aller Äquivalenzklassen von Zufallsgrößen $\mathfrak{f} : \Omega \longrightarrow \mathcal{C}$ mit der Eigenschaft

$$\mathcal{E} |\mathfrak{f}(\cdot)|^2 = \int_{\Omega} |\mathfrak{f}(\cdot)|^2 dP < \infty$$

L^2 ist ein Hilbertraum mit dem inneren Produkt

$$\langle \mathfrak{f}, \mathfrak{g} \rangle = \mathcal{E} \mathfrak{f}(\cdot) \overline{\mathfrak{g}(\cdot)}$$

Die Norm in L^2 sei mit $\|\mathfrak{f}\|$ bezeichnet.

Sei weiterhin H ein komplexer separabler Hilbertraum mit innerem Produkt (φ, ψ) und Norm $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$.

$x: \Omega \longrightarrow H$ heißt H -wertige Zufallsgröße zweiter Ordnung, wenn gilt: Für alle $\varphi \in H$ ist die Abbildung

$$(\varphi, x(\cdot)) : \Omega \longrightarrow \mathcal{C} \text{ meßbar und } \mathcal{E} \|x(\cdot)\|^2 < \infty.$$

(Bei separablen Hilberträumen ist diese Meßbarkeit äquivalent zur starken Meßbarkeit, s. Hille-Phillips [5]. Außerdem folgt aus ihr die Meßbarkeit von $\|x(\cdot)\|$.)

$L^2(H)$ sei die Menge der Äquivalenzklassen H -wertiger Zufallsgrößen zweiter Ordnung. $L^2(H)$ ist ein Hilbertraum mit dem inneren Produkt $(x, y)_{L^2(H)} := \mathcal{E} (x(\cdot), y(\cdot))$.

Jeder H -wertigen Zufallsgröße zweiter Ordnung $x(\cdot)$ sei zugeordnet die Abbildung $X: H \longrightarrow L^2$, die jedem $\varphi \in H$ die Äquivalenzklasse zuordnet, die die Zufallsgröße

$$(\varphi, x(\cdot)) : \Omega \longrightarrow \mathcal{C} \text{ enthält. Wegen } \|X\varphi\|^2 = \mathcal{E} |(\varphi, x(\cdot))|^2 \leq \|\varphi\|^2 \cdot \mathcal{E} \|x(\cdot)\|^2 \text{ ist } X \text{ ein stetiger linearer Operator; mehr}$$

noch: Ist nämlich (φ_k) ein vollständiges Orthonormalsystem von H , so erhält man nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz und der Parsevalschen Gleichung

$$\sum_k \|X\varphi_k\|^2 = \sum_k \mathcal{E} |(\varphi_k, x(\cdot))|^2 = \mathcal{E} \left(\sum_k |(\varphi_k, x(\cdot))|^2 \right) = \mathcal{E} \|x(\cdot)\|^2 < \infty$$

d.h. X ist ein HS-Operator.

Seien $x(\cdot)$ und $y(\cdot)$ H -wertige Zufallsgrößen zweiter Ordnung mit $x(\cdot) \stackrel{2}{\sim} y(\cdot)$. Dann gilt für alle $\varphi \in H$

$(\varphi, x(\cdot)) \stackrel{P}{\sim} (\varphi, y(\cdot))$ und für die $x(\cdot)$ und $y(\cdot)$ zugeordneten HS-Operatoren X und Y somit $X\varphi = Y\varphi$; X und Y sind also identisch. Durch die Zuordnung $x(\cdot) \mapsto X$ wird daher eine wohldefinierte Abbildung

$$(11) \quad \begin{aligned} U: L^2(H) &\longrightarrow HS(H, L^2) \\ x(\cdot) \in x &\longmapsto X \end{aligned}$$

festgelegt. Man beweist leicht den folgenden

Satz 6 U ist eine konjugiert lineare isometrische Abbildung von $L^2(H)$ auf $HS(H, L^2)$, d.h., es gilt für alle x, y aus $L^2(H)$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} U(\alpha x + \beta y) &= \bar{\alpha} Ux + \bar{\beta} Uy, \\ \langle Ux, Uy \rangle_{HS} &= (y, x)_{L^2(H)} \quad \text{und} \\ U &\text{ ist surjektiv} \end{aligned}$$

Da in den folgenden Untersuchungen nur die Hilbertraumstruktur von $L^2(H)$ eine Rolle spielt, kann man nach diesem Satz gleichermaßen Zufallsgrößen zweiter Ordnung wie entsprechende HS-Operatoren betrachten. Wir werden das in § 1 beschriebene Modell in den folgenden Abschnitten schrittweise in den Operatorenbereich übertragen. Dazu sind noch einige Ausführungen über die Stationarität von Operatorfolgen erforderlich:

Sei V ein linearer Raum über dem Körper der komplexen Zahlen und L ein komplexer Hilbertraum mit innerem Produkt (φ, ψ) . Sei ferner $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ eine Folge von linearen Operatoren $A_n: V \rightarrow L$

Definition Die Folge (A_n) heißt stationär, wenn für alle ganzen Zahlen n und k , sowie für alle v und w aus V gilt:

$$(A_n v, A_{n+k} w) = (A_0 v, A_k w)$$

Ist speziell $V = \mathbb{C}^M$ und $L = L^2$, so sind die Operatoren A_n

HS-Operatoren und die durch die Abbildung U^{-1} ^{*)} zugeordneten Zufallsgrößen M-dimensionale Zufallsvektoren

$$a_n = \begin{pmatrix} a_1^{(n)} \\ \vdots \\ a_M^{(n)} \end{pmatrix}$$

mit $a_1^{(n)} \in L^2$. Wählt man für v und w speziell die Einheitsvektoren des $\mathbb{C}^M$, so lautet die Stationaritätsbedingung:

$$\langle a_i^{(n)}, a_j^{(n+k)} \rangle = \langle a_i^{(0)}, a_j^{(k)} \rangle$$

für alle $i, j = 1, \dots, M$, d.h., die Folge (a_n) ist ein im weiteren Sinne stationärer Vektorprozeß. Durch die obige Definition wird der Begriff der Stationarität auf Folgen H-wertiger Zufallsgrößen erweitert, wenn man $V = H$, $L = L^2$ und als A_n HS-Operatoren wählt. Die Stationarität läßt sich natürlich auch für Familien $(A_t)_{t \in \tilde{T}}$ formulieren, wenn $\tilde{T}$ eine Gruppe ist (vgl. Payen), ebenso wie der folgende Satz. Da dies in der vorliegenden Arbeit jedoch nicht benötigt wird, sei nur die Aussage für Operatorfolgen formuliert:

Satz 7 V, L und (A_n) seien wie oben definiert. Die Folge (A_n) sei stationär und $M_A = L$ sei der von den Elementen $A_n v$, $n \in \mathbb{Z}$, $v \in V$ aufgespannte abgeschlossene Unterraum von L . Dann gibt es einen unitären Operator $T: M_A \rightarrow M_A$ mit der Eigenschaft $A_{n+1} = T A_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis s. Payen [9]

Der Satz wird von Payen für den Fall bewiesen, daß V ein Hilbertraum ist, ohne daß die Hilbertraumeigenschaften jedoch verwendet werden. Der Beweis kann von dort wörtlich übernommen werden.

^{*)} U wie in (11) mit $H = \mathbb{C}^M$.

§ 3 Beschreibung des Modells

Wir zeigen hier die Eigenschaften des Übertragungssystems aus § 1 auf, die wir in unserem Modell verwenden wollen.

Das Eingangssignal

Wie in § 1 beschrieben, sollen über den Übertragungskanal M Eingangssignale in Form von im weiteren Sinne stationären und stationär korrelierten Folgen von Zufallsgrößen gesendet werden. Da es auf Unterschiede in P -Nullmengen nicht ankommt, gehen wir zu Äquivalenzklassen über und erhalten als Eingangssignale Folgen $(\mathcal{J}_k^{(m)})_{k \in \mathbb{Z}}$; $1 \leq m \leq M$; von Elementen $\mathcal{J}_k^{(m)} \in L^2$ mit der Eigenschaft:

- (1) Für alle $1 \leq m, n \leq M$ und alle ganzen Zahlen k, l hängt $\langle \mathcal{J}_k^{(m)}, \mathcal{J}_{k+l}^{(n)} \rangle$ nicht von k ab.

Diese M Folgen fassen wir zu einer einzigen im weiteren Sinne stationären Vektorfolge (x_k) mit

$$x_k = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_k^{(1)} \\ \vdots \\ \mathcal{J}_k^{(M)} \end{pmatrix}$$

zusammen. Die Erweiterung des Modells auf "unendlich viele" Eingangssignale ist dann augenfällig. Zu jedem "Zeitpunkt" k werden dem Kanal nicht M Zufallsgrößen

$\mathcal{J}_k^{(1)}, \mathcal{J}_k^{(2)}, \dots, \mathcal{J}_k^{(M)}$ präsentiert, sondern eine ganze Folge

$$x_k = (\mathcal{J}_k^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}.$$

Die Folge (x_k) sehen wir dann als das - im allgemeinen mehrdimensionale - Eingangssignal an.

Sind die $\mathcal{J}_k^{(m)}$ beispielsweise Spannungen, die in einem elektrischen Netzwerk erzeugt werden, so muß man sinnvollerweise annehmen, daß die gesamte Energie, die diese Spannungen zu einem bestimmten Zeitpunkt erzeugt, endlich

ist. Für die $\mathfrak{J}_k^{(m)}$ bedeutet das:

$$(2) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E} |\mathfrak{J}_k^{(m)}(\cdot)|^2 < \infty \quad \text{für alle } k,$$

d.h. für fast alle $\omega \in \Omega$ liegt die Folge $(\mathfrak{J}_k^{(m)}(\omega))_{m \in \mathbb{N}}$ im Hilbertraum l_2 der quadratisch summierbaren Folgen (komplexer) Zahler. Wir sind somit bei dem Konzept hilbertraumwertiger Zufallsgrößen zweiter Ordnung angelangt: $x_k \in L^2(l_2)$ für alle k , oder allgemeiner $x_k \in L^2(H)$ für einen beliebigen komplexen separablen Hilbertraum H . Damit ist auch der ursprüngliche Fall $H = \mathbb{C}^M$, d.h. M -dimensionaler stationärer Folgen erfaßt. Gehen wir noch zu den entsprechenden HS-Operatoren über, so erhalten wir als Verallgemeinerung des ursprünglichen Modells die folgende

Definition 1 Das Eingangssignal ist eine stationäre Folge $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ von HS-Operatoren $X_k: H \rightarrow L^2$ eines separablen Hilbertraums H in den Raum L^2 . H heiße der Trägerraum des Signals.

Das Sendesignal

Das Sendesignal $w(t)$ kommt dadurch zustande, daß in Abständen von T Sekunden Zufallsprozesse der Form $\mathfrak{J}_k^{(m)} g_m(t)$ generiert und den bereits vorher gesendeten überlagert werden. Wesentlich neue Information gelangt also nur alle T Sekunden in den Übertragungskanal, so daß es naheliegt; $w(t)$ nicht als Ganzes zu betrachten, sondern abschnittsweise auf Intervallen der Länge T . Wir konstruieren deshalb aus $w(t)$ eine Folge $(w_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ von stochastischen Prozessen auf dem Intervall $[0, T]$:

$$(3) \quad w_k(\tau) = w(\tau + kT) \quad k \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq \tau \leq T$$

Jedes dieser w_k ist von der Form (vgl. (2.1))

$$\tilde{w}(\tau) = \sum_{i=1}^n \mathfrak{J}_i f_i(\tau)$$

mit $f_i \in L^2$ und stetigen Funktionen $f_i: [0, T] \longrightarrow \mathcal{C}$, die wir insbesondere als Elemente des Hilbertraums $K_0 = L^2([0, T], \mathcal{C})$ auffassen können. $\tilde{w}(\omega; \cdot) = \sum_{i=1}^n f_i(\omega) f_i(\cdot)$ liegt also für fast alle $\omega \in \Omega$ in K_0 . Außerdem gilt:

$$\mathcal{E} \|\tilde{w}(\cdot)\|_0^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle f_i, f_j \rangle (f_i, f_j)_0 < \infty$$

d.h. $\tilde{w}$ bzw. die w_k sind Elemente des Raums $L^2(K_0)$.

$w_k: K_0 \longrightarrow L^2$ seien die durch die Abbildung U den w_k zugeordneten HS-Operatoren. Es gilt das

Lemma 2 Die Folge (w_k) ist stationär.

Beweis

$$w_k(\tau) = w(\tau + kT) = \sum_{m=1}^M \sum_n \tilde{f}_n^{(m)} g_m(\tau + kT - nT) ,$$

dabei ist die Summe über n bei festem τ eine endliche, da die g_m nach Voraussetzung nur auf beschränkten Intervallen von Null verschieden sind. Für $f \in K_0$ ist nach Definition

$$w_k f = (f, w_k)_0 = \sum_{m=1}^M \sum_n \tilde{f}_n^{(m)} (f, g_m(\cdot + kT - nT))_0$$

Seien k und l ganze Zahlen, f und g aus K_0 .

$$\begin{aligned} \langle w_l f, w_k g \rangle &= \sum_{\mu=1}^M \sum_{\nu=1}^M \sum_{m'} \sum_{n'} \langle \tilde{f}_{n'+l}^{(\nu)}, \tilde{f}_{m'+k}^{(\mu)} \rangle \cdot \\ &\quad \cdot (f, g_\mu(\cdot + lT - m'T))_0 \cdot \overline{(g, g_\nu(\cdot + kT + lT - n'T))_0} \end{aligned}$$

Sei $m' = m - 1$ und $n' = n - 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} \langle w_l f, w_k g \rangle &= \sum_{\mu=1}^M \sum_{\nu=1}^M \sum_{m'} \sum_{n'} \langle \tilde{f}_{n'+l}^{(\nu)}, \tilde{f}_{m'+k}^{(\mu)} \rangle \cdot \\ &\quad \cdot (f, g_\mu(\cdot - m'T))_0 \cdot \overline{(g, g_\nu(\cdot + kT - n'T))_0} \end{aligned}$$

Für die Folgen $(\tilde{f}_m^{(\mu)})$ gilt nach (1) außerdem

$$\langle \tilde{f}_{n'+l}^{(\nu)}, \tilde{f}_{m'+k}^{(\mu)} \rangle = \langle \tilde{f}_{n'}^{(\nu)}, \tilde{f}_{m'}^{(\mu)} \rangle$$

Dies eingesetzt in die letzte Gleichung ergibt

$$\langle w_1 f, w_{k+1} g \rangle = \langle w_0 f, w_k g \rangle$$

und damit die behauptete Stationarität der Folge (w_k) .

Als Verallgemeinerung des Sendesignals $w(t)$ hat sich somit auf natürliche Weise ergeben:

Definition 3 Das Sendesignal ist eine stationäre Folge $(w_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ von HS-Operatoren $w_k: K_0 \longrightarrow L^2$ des (separablen) Hilbertraums K_0 in den Raum L^2 .

Bleibt noch zu klären, wie sich der Zusammenhang zwischen den $(j_k^{(m)})$ und $w(t)$, d.h. die Puls-Amplituden-Modulation auf die entsprechenden Operatorfolgen überträgt:

Filterung von Signalen

Wir gehen wieder vom ursprünglichen Modell aus. Der Folge (x_k) mit

$$x_k = \begin{pmatrix} j_k^{(1)} \\ j_k^{(2)} \\ \vdots \\ j_k^{(M)} \end{pmatrix}$$

entsprechen die HS-Operatoren $X_k: \mathbb{C}^M \longrightarrow L^2$, gegeben durch

$$(4) \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_M \end{pmatrix} \longmapsto X_k z := \sum_{m=1}^M z_m j_k^{(m)}$$

Es sei M_x der von den $X_k z$ erzeugte abgeschlossene Unterraum des L^2 und $T_x: M_x \longrightarrow M_x$ der nach Satz 2.7 eindeutig

bestimmte unitäre Operator mit der Eigenschaft $X_{k+1} = T_X X_k$.
Man sieht sofort, daß

a) M_X die abgeschlossene lineare Hülle der $\bar{J}_k^{(m)}$ und

b) $T_X \bar{J}_k^{(m)} = \bar{J}_{k+1}^{(m)}$ ist.

Sei (W_k) die dem Sendesignal $w(t)$ entsprechende Operatorfolge:

$$(5) \quad W_k f = \sum_{m=1}^M \sum_n \bar{J}_n^{(m)}(f, g_m(\cdot + kT - nT))_0 \quad f \in K_0$$

Für diese W_k gilt:

Lemma 4

(6) $W_k f \in M_X$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle $f \in K_0$

(7) $W_{k+1} = T_X W_k$

(8) $W_0 = \sum_{j \in J} X_j A_j$, wo $J \subset \mathbb{Z}$ eine endliche Menge von ganzen Zahlen und die $A_j: K_0 \longrightarrow \mathcal{C}^M$ lineare beschränkte Operatoren sind.

Beweis

(6) ist aus (5) unmittelbar ersichtlich.

Für alle $f \in K_0$ ist weiterhin

$$W_{k+1} f = \sum_{m=1}^M \sum_n \bar{J}_n^{(m)}(f, g_m(\cdot + kT + T - nT))_0$$

Eine Änderung des Summationsindex $n = n' + 1$ sowie

$$\bar{J}_{n'+1}^{(m)} = T_X \bar{J}_{n'}^{(m)} \text{ ergibt}$$

$$\begin{aligned} W_{k+1} f &= \sum_{m=1}^M \sum_{n'} T_X \bar{J}_{n'}^{(m)}(f, g_m(\cdot + kT - n'T))_0 = \\ &= T_X \left[\sum_{m=1}^M \sum_{n'} \bar{J}_{n'}^{(m)}(f, g_m(\cdot + kT - n'T))_0 \right] = T_X W_k f \end{aligned}$$

und damit (7).

N sei eine positive ganze Zahl so, daß für $m = 1, \dots, M$ und $t \leq -NT$ sowie $t > (N+1)T$ gilt: $g_m(t) = 0$.

Es sei $J = \{-N, -N+1, \dots, 0, 1, \dots, N\}$ und für alle $j \in J$ $A_j: K_0 \longrightarrow \mathbb{C}^M$ definiert durch

$$f \longmapsto \begin{pmatrix} (f, g_1(\cdot - jT))_0 \\ (f, g_2(\cdot - jT))_0 \\ \vdots \\ (f, g_M(\cdot - jT))_0 \end{pmatrix}$$

Die A_j sind linear und beschränkt und es gilt

$$\begin{aligned} W_0 f &= \sum_{m=1}^M \sum_{j \in J} \bar{f}_j^{(m)} (f, g_m(\cdot - jT))_0 = \\ &= \sum_{j \in J} \left[\sum_{m=1}^M (f, g_m(\cdot - jT))_0 \cdot \bar{f}_j^{(m)} \right] = \sum_{j \in J} X_j A_j f \end{aligned}$$

Zur Definition der Filterung von Signalen benutzen wir nur die Eigenschaften (6) und (7) aus Lemma 4:

Definition 5 H und K seien separable Hilberträume, (X_k) und (Y_k) Folgen von HS-Operatoren $X_k: H \longrightarrow L^2$ und $Y_k: K \longrightarrow L^2$. Die Folge (X_k) sei stationär, M_X die abgeschlossene Hülle der $X_k \varphi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $\varphi \in H$. Ferner sei $T_X: M_X \longrightarrow M_X$ der durch $X_{k+1} = T_X X_k$ eindeutig bestimmte unitäre Operator.

Wir sagen, die Folge (Y_k) sei aus (X_k) gefiltert - $(Y_k) \ll (X_k)$ -, wenn es einen HS-Operator $Y: K \longrightarrow M_X$ gibt mit der Eigenschaft

$$(9) \quad Y_k = T_X^k Y$$

Bemerkung In der angelsächsischen Literatur sind für die Eigenschaft $(Y_k) \ll (X_k)$ die Bezeichnungen (Y_k) ist "linear transformation of" (X_k) oder " (Y_k) subordinate (X_k) " gebräuchlich, vgl. Rosenberg [10]. Der Begriff "Filterung" ist der Nachrichtentheorie entlehnt.

Ist der Operator Y in Definition 5 von der Form

$$Y = \sum_{j \in J} X_j A_j$$

mit einer endlichen Indexmenge $J \subset \mathbb{Z}$ und linearen beschränkten Operatoren $A_j: K \rightarrow H$, so wird die Folge der

$$Y_k = T_x^k Y = \sum_{j \in J} X_{j+k} A_j$$

als gleitender Mittelwert ("moving average") der Folge (X_k) bezeichnet. Eigenschaft (8) in Lemma 4 besagt, daß es sich bei der aus $w(t)$ abgeleiteten Folge (w_k) um einen solchen handelt. Der folgende Satz zeigt, daß man durch Weglassen dieser Eigenschaft, also durch die obige Definition 5 nicht mehr erhält als den topologischen Abschluß dieser gleitenden Mittelwerte im Raum der HS-Operatoren:

Satz 6 (X_k) und M_x wie in Definition 5. Ferner sei $\mathcal{M}$ die in der Norm $\|\cdot\|_{HS}$ abgeschlossene lineare Hülle der Operatoren der Form

$$(10) \quad \sum_{j \in J} X_j A_j, \quad ,$$

wobei $J \subset \mathbb{Z}$ eine endliche Menge ganzer Zahlen und die $A_j: K \rightarrow H$ lineare beschränkte Operatoren sind. Dann ist

$$\mathcal{M} = HS(K, M_x) .$$

Satz 6 folgt aus dem nachstehenden Satz 8, zu dessen Beweis wir das folgende, von Payen [9] bewiesene Lemma benötigen:

Lemma 7 H_1, H_2 seien Hilberträume, $(X_\iota)_{\iota \in I}$ eine Familie stetiger linearer Abbildungen $X_\iota: H_1 \rightarrow H_2$ und $\bar{M}$ der kleinste abgeschlossene Unterraum von H_2 , der die Wertebereiche $X_\iota(H_1)$ aller X_ι enthält. Dann ist die in der Topologie der punktweisen Konvergenz abgeschlossene Hülle der Operatoren

$Y = \sum_{l \in J} X_l A_l$, $J \subset I$ endlich, $A_l: H_1 \longrightarrow H_1$ linear, stetig

gleich der Menge der stetigen linearen Abbildungen

$X: H_1 \longrightarrow H_2$, deren Wertebereich in $\overline{M}$ enthalten ist.

Satz 8 H_1, H_2 und L seien Hilberträume, H_1 und H_2 separabel. $(X_l)_{l \in I}$ sei eine Familie von HS-Operatoren $X_l: H_2 \longrightarrow L$, $\overline{M}$ der kleinste abgeschlossene Unterraum von L , der die Wertebereiche aller X_l enthält und $\mathcal{M}$ die in der Norm $\|\cdot\|_{HS}$ abgeschlossene Hülle der Operatoren $Y: H_1 \longrightarrow \overline{M}$ der Form

$$(11) \quad Y = \sum_{l \in J} X_l A_l \quad , \quad J \subset I \text{ endlich, } A_l: H_1 \longrightarrow H_2 \\ \text{linear und stetig.}$$

Dann ist $\mathcal{M} = HS(H_1, \overline{M})$.

Beweis

Da jeder Operator Y der Form (11) in $HS(H_1, \overline{M})$ liegt, gilt auf jeden Fall $\mathcal{M} \subset HS(H_1, \overline{M})$. Zu zeigen ist daher nur noch, daß jeder HS-Operator $Y: H_1 \longrightarrow \overline{M}$ in $\mathcal{M}$ liegt.

a) Wir betrachten zunächst den Spezialfall $H_1 = H_2$.

$Y: H_2 \longrightarrow \overline{M}$ sei ein HS-Operator, $\varepsilon > 0$ eine beliebig vorgegebene positive reelle Zahl und (e_n) ein vollständiges Orthonormalsystem von H_2 . Ist die Dimension von H_2 abzählbar unendlich, so gibt es eine Zahl $N = N(\varepsilon)$, so daß

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \|Y e_n\|^2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ist die Dimension von H_2 endlich, so sei im folgenden N gleich dieser Dimension.

Nach Lemma 7 gibt es ein $\hat{Y}$ der Form (11), so daß für $1 \leq n \leq N$

$$\|Y e_n - \hat{Y} e_n\|^2 < \frac{\varepsilon}{2N}$$

Es sei $P_N: H_2 \rightarrow H_2$ die Projektion auf den von $e_1, \dots, e_N$ aufgespannten Unterraum von H_2 . Dann ist $Y_0 := Y P_N$ wieder von der Form (11) und es gilt

$$\|Y - Y_0\|_{HS}^2 = \sum_n \|Y e_n - Y_0 e_n\|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \|Y e_n - \hat{Y} e_n\|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} \|Y e_n\|^2,$$

wobei der letzte Summand bei endlicher Dimension entfällt. Daraus folgt nach den obigen Abschätzungen $\|Y - Y_0\|_{HS}^2 < \varepsilon$ und, da ε beliebig war, $Y \in \mathcal{M}$.

- b) Ist die Dimension von H_1 kleiner oder gleich der von H_2 , so können wir H_1 als in H_2 isometrisch eingebettet betrachten und erhalten aus a) die Behauptung, wenn man Y auf dem orthogonalen Komplement der Einbettung identisch Null fortsetzt.
- c) Sei nunmehr die Dimension von H_2 kleiner als die von H_1 , insbesondere also endlich, etwa gleich N und $f_1, \dots, f_N$ eine Orthonormalbasis von H_2 . Die Dimension von H_1 sei abzählbar unendlich angenommen, um die Beweisführung zu vereinfachen. Die nötigen Änderungen für den Fall endlicher Dimension werden augenfällig sein. Sei ferner $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von H_1 , $Y: H_1 \rightarrow \bar{M}$ ein HS-Operator und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Es gibt eine natürliche Zahl $M = M(\varepsilon)$, die wir o.B.d.A. als Vielfaches von N wählen können - etwa $M = R \cdot N$, $R \in \mathbb{N}$ - und für die gilt

$$\sum_{n=M+1}^{\infty} \|Y e_n\|^2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

Für $1 \leq r \leq R$ seien $U_r: H_2 \rightarrow H_1$ die Abbildungen, die sich durch lineare Fortsetzung aus den Zuordnungen

$$U_r f_n = e_k \quad \text{für} \quad k = (r-1)N + n \quad 1 \leq n \leq N$$

ergeben, und $Y_r := Y U_r$. $Y_r: H_2 \rightarrow \bar{M}$ sind wieder HS-Operatoren, wir können daher nach a) $Z_r: H_2 \rightarrow \bar{M}$ der

Form (11) finden mit

$$\|Y_r - Z_r\|_{HS}^2 < \frac{\varepsilon}{2R}$$

Seien die linearen stetigen Abbildungen $\tilde{U}_r: H_1 \rightarrow H_2$ definiert durch

$$\tilde{U}_r e_k = \begin{cases} f_n & k = (r-1)N + n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und lineare Fortsetzung, dann ist $Y_0 := \sum_{r=1}^R Z_r \tilde{U}_r$ von der Form (11) und es gilt

$$\begin{aligned} \|Y - Y_0\|_{HS}^2 &= \sum_{k=1}^M \|Y e_k - Y_0 e_k\|^2 + \sum_{k>M} \|Y e_k\|^2 < \\ &< \sum_{r=1}^R \sum_{k=(r-1)N+1}^{rN} \|Y e_k - Z_r \tilde{U}_r e_k\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \sum_{r=1}^R \|Y_r - Z_r\|_{HS}^2 + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

und damit wieder $Y \in \mathcal{M}$, da ε beliebig war.

Charakterisierung des Übertragungskanals

Der Übertragungskanal wird charakterisiert durch das "Störsignal" $n(t)$, das dem Sendesignal $w(t)$ additiv überlagert wird. Wie sich später zeigen wird, genügt es nicht für $n(t)$ einen gewöhnlichen stochastischen Prozeß zu wählen. Bei dem zugrundeliegenden technischen System wird zumeist angenommen, daß es sich um "weißes Rauschen", also einen im weiteren Sinne stationären verallgemeinerten stochastischen Prozeß zweiter Ordnung (Gelfand-Vilenkin [4]) handelt, also eine Abbildung $\Phi: D \rightarrow L^2$ des topologischen linearen Raums D der beliebig oft differenzierbaren Funktionen $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{C}$ mit kompaktem Träger in den Raum L^2 mit den folgenden Eigenschaften:

- 1.) $\tilde{\Phi}$ ist linear und stetig bezüglich der üblichen Topologie auf D und der schwachen Topologie auf L^2 .
- 2.) Seien für alle $t \in \mathbb{R}$ die Abbildungen $\tau_t: D \rightarrow D$ definiert durch $\tau_t f(s) = f(s+t)$. Dann gilt für alle t und die (stetige) Sesquilinearform $B_{\tilde{\Phi}}(f, g) := \langle \tilde{\Phi}(f), \tilde{\Phi}(g) \rangle$:

$$B_{\tilde{\Phi}}(\tau_t f, \tau_t g) = B_{\tilde{\Phi}}(f, g)$$

So wie $w(t)$ das Sendesignal über den gesamten Zeitraum $t \in \mathbb{R}$ beschreibt, stellt $\tilde{\Phi}$ die Wirkung des Rauschens auf das gesamte Sendesignal $w(t)$ dar. Um die Abbildung $\tilde{\Phi}$ mit den Operatoren W_k vergleichen zu können, muß man sie ebenfalls "intervallweise" aufspalten: Sei K der nukleare Raum der Funktionen $\varphi \in D$, die außerhalb des Intervalls $(0, T)$ verschwinden. Für $k \in \mathbb{Z}$ seien die Operatoren

$$N_k: K \rightarrow L^2$$

definiert durch $N_k \varphi := \tilde{\Phi}(\tau_{kT} \varphi)$. Die N_k sind linear und stetig bezüglich der schwachen Topologie auf L^2 . Außerdem gilt für beliebige ganze Zahlen k und l , sowie $\varphi, \psi \in K$ wegen der Stationarität von $\tilde{\Phi}$:

$$\begin{aligned} \langle N_l \varphi, N_{k+l} \psi \rangle &= B_{\tilde{\Phi}}(\tau_{lT} \varphi, \tau_{lT}(\tau_{kT} \psi)) = B_{\tilde{\Phi}}(\varphi, \tau_{kT} \psi) = \\ &= \langle N_0 \varphi, N_k \psi \rangle, \end{aligned}$$

die Folge der N_k ist also stationär. Sei M_N die abgeschlossene lineare Hülle der $N_k \varphi$ in L^2 und $T_N: M_N \rightarrow M_N$ der eindeutig bestimmte unitäre Operator mit $N_{k+1} = T_N N_k$, so erhalten wir

Lemma 9 Es gibt ein $p \in \mathbb{N}_0$, so daß die Operatoren N_k auf ganz K_p fortgesetzt werden können und eine stationäre Folge von HS-Operatoren $N_k: K_p \rightarrow L^2$ bilden.

(Wir verwenden i.f. die in § 2 eingeführten Bezeichnungen $K_p, (\dots)_p$ usw.)

Beweis

$N_0: K \rightarrow L^2$ ist linear und stetig. Nach Lemma 2.5 gibt es daher ein $p \in \mathbb{N}_0$, so daß N_0 ein HS-Operator auf K_p ist. Die Eigenschaften $N_k = T_N^k N_0$ und Stationarität setzen sich wegen der Stetigkeit auf K_p fort.

Damit ist eine den Definitionen der Signale vergleichbare Beschreibung des Übertragungskanals gefunden. Zusätzlich wird nur noch eine gewisse Unabhängigkeit des Eingangssignals vom Übertragungskanal benötigt. Wir nehmen an, daß diese im folgenden Sinne orthogonal zueinander in L^2 sind: Für alle ganzen Zahlen k und l , sowie alle $\varphi \in H$ und alle $f \in K$ gelte:

$$\langle X_k \varphi, N_l f \rangle = 0$$

Diese Bedingung ist äquivalent zu: M_X und M_N sind orthogonale Teilräume des L^2 .

Die Wirkung des Störsignals im Kanal läßt sich wie folgt beschreiben: Der Folge (W_k) mit $(W_k) \ll (X_k)$ wird zugeordnet die Folge (Z_k) mit

$$Z_k := W_k J + N_k, \quad ,$$

dabei ist $J: K_p \rightarrow K_0$ die kanonische Einbettung. Die Abbildung J ist stetig, daher sind die $W_k J: K_p \rightarrow L^2$ wieder HS-Operatoren. Die Folge der $W_k J$ ist als Einschränkung der Folge (W_k) auf K_p natürlich wieder stationär.

Sei $T_s := T_X \oplus T_N: M_X \oplus M_N \rightarrow M_X \oplus M_N$ die direkte Summe der Operatoren T_X und T_N . T_s ist wieder unitär und es gilt $Z_{k+1} = T_s Z_k$, (Z_k) ist eine stationäre Folge von HS-Operatoren $Z_k: K_p \rightarrow L^2$.

Wir fassen das zusammen in der

Definition 10 Der Übertragungskanal wird charakterisiert durch eine stationäre Folge (N_k) von HS-Operatoren

$$(11) \quad N_k: K_p \longrightarrow L^2, \quad ,$$

die orthogonal zum Eingangssignal (X_k) ist.

Die Wirkung des Kanals auf ein Sendesignal $(W_k) \ll (X_k)$

mit $W_k: K_o \longrightarrow L^2$ ist die stationäre Folge (Z_k) von Operatoren

$$(12) \quad Z_k := W_k J + N_k: K_p \longrightarrow L^2, \quad ,$$

wo $J: K_p \longrightarrow K_o$ die kanonische Einbettung von K_p in K_o ist.

Das Empfangssignal

$z_k: \Omega \longrightarrow K_p$ seien die K_p -wertigen Zufallsgrößen zweiter Ordnung, die den HS-Operatoren $Z_k: K_p \longrightarrow L^2$ über die Abbildung $U: L^2(K_p) \longrightarrow HS(K_p, L^2)$ aus Satz 2.6 entsprechen, und $z(t)$ gegeben durch $z(\tau + kT) = z_k(\tau)$ mit $0 \leq \tau < T$. Das gestörte Signal am Kanalausgang in der ursprünglichen Schreibweise ist eine "stochastische Distribution" und seine lineare Demodulation die Anwendung dieser Distribution auf Testfunktionen. Für Funktionen $h_m \in D$; $1 \leq m \leq M$; erhalten wir daher

$$y_m(t) = \sum_{q=0}^p \int \frac{d^q}{ds^q} z(s) \frac{d^q}{ds^q} h_m(t-s) ds$$

Speziell für $h_m = \sum_{n \in J} \tau_{nT} \hat{h}_n^{(m)}$ mit einer endlichen Teilmenge $J \subset \mathbb{Z}$ und $\hat{h}_n^{(m)} \in K \subset K_p$ erhält man daraus

$$(13) \quad \tilde{x}_k^{(m)} := y_m(kT) = \sum_{n \in J} \overline{\{Z_{n+k-1}(\tilde{h}_n^{(m)})\}}$$

$$\text{mit } \tilde{h}_n^{(m)}(s) = \overline{\hat{h}_n^{(m)}(T-s)}$$

Für die den vektoriellen Zufallsgrößen

$$\tilde{x}_k = \begin{pmatrix} \tilde{x}_k^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{x}_k^{(M)} \end{pmatrix}$$

zugeordneten HS-Operatoren $\tilde{X}_k: \mathbb{C}^M \rightarrow L^2$ gilt dann

$$\tilde{X}_k a = \sum_{m=1}^M a_m \overline{\tilde{x}_k^{(m)}} = \sum_{n \in J} Z_{n+k-1} \left(\sum_{m=1}^M a_m \tilde{h}_n^{(m)} \right)$$

Definiert man die linearen Abbildungen $A_n: \mathbb{C}^M \rightarrow K_p$ durch

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_M \end{pmatrix} \longmapsto \sum_{m=1}^M a_m \tilde{h}_n^{(m)},$$

ergibt dies die Darstellung $\tilde{X}_k = \sum_{n \in J} Z_{n+k-1} A_n$.

$(\tilde{X}_k)$ ist also gleitender Mittelwert von (Z_k) , insbesondere ist $(\tilde{X}_k) \ll (Z_k)$. Lineare Demodulation und anschließende Abtastung sind nichts anderes als eine Filterung der entsprechenden Operatorfolgen. Daher die

Definition 11 (Z_k) wie in Definition 10. Das Empfangssignal $(\tilde{X}_k)$ ist eine Folge von HS-Operatoren $\tilde{X}_k: H \rightarrow L^2$ mit $(\tilde{X}_k) \ll (Z_k)$.

§ 4 Das Optimierungsproblem

Das Übertragungssystem

Das gesamte Übertragungssystem ist nunmehr bestimmt durch das Eingangssignal (X_k) und das Störsignal (N_k) , oder äquivalent dazu durch Angabe der Tripel (X, M_x, T_x) und (N, M_N, T_N) . Dabei sind $X: H \rightarrow L^2$ und $N: K_p \rightarrow L^2$ die HS-Operatoren $X = X_O$ und $N = N_O$,

$$M_x = \left[\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} T_x^k X(H) \right] \text{ und } M_N = \left[\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} T_N^k N(K_p) \right]$$

die abgeschlossenen linearen Hüllen der Vereinigung der Bildmengen der Operatoren $X_k = T_x^k X$ und $N_k = T_N^k N$,

T_x, T_N die in § 2 konstruierten unitären Operatoren in M_x bzw. M_N . Vorausgesetzt ist dabei, daß M_x und M_N orthogonal sind. $T: M_x \oplus M_N \rightarrow M_x \oplus M_N$ sei die direkte Summe der Operatoren T_x und T_N . Es gilt dann: $X_k = T^k X$ und $N_k = T^k N$.

Das Sendesignal $(W_k) \ll (X_k)$ ist vollständig charakterisiert durch Angabe des HS-Operators $W: K_O \rightarrow M_x$ mit $W_k = T_x^k W = T^k W$, ebenso das Empfangssignal $(\tilde{X}_k)$ durch $\tilde{X}: H \rightarrow M_z$. Dabei ist

$$M_z = \left[\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} T^k (WJ+N)(K_p) \right],$$

$J: K_p \rightarrow K_O$ die kanonische Einbettung. Es gilt $\tilde{X}_k = T^k \tilde{X}$. Wir bezeichnen W bzw. $\tilde{X}$ als Sende- bzw. Empfangsfilter.

Der Übertragungsfehler

Die Folge $(\tilde{X}_k - X_k)$ ist wegen $\tilde{X}_k - X_k = T^k(\tilde{X} - X)$ wieder stationär und somit die Größe

$$(1) \quad \|\tilde{X}_k - X_k\|_{HS}^2 = \|\tilde{X} - X\|_{HS}^2$$

unabhängig von k . Wir wählen sie als Maß für den Übertragungsfehler, wenn $(\tilde{X}_k)$ als Approximation an (X_k) interpretiert wird.

Das Optimierungsproblem

Demgemäß stellen sich die folgenden beiden Fragen, die wir in dieser Arbeit zu beantworten versuchen werden:

Unter welchen Voraussetzungen gibt es Sende- und Empfangsfilter $W: K_0 \rightarrow M_x$ und $\tilde{X}: H \rightarrow M_z$, die den Übertragungsfehler (1) minimieren, wobei die Sendefilter gewissen Beschränkungen unterliegen, die wir in einem späteren Abschnitt aus den in § 1 beschriebenen Leistungsbeschränkungen ableiten werden; und - wenn es solche optimalen Filter gibt - wie kann man aus ihnen die entsprechenden Funktionen g_m und h_m im Modell des § 1 herleiten?

Bei der Lösung dieses Optimierungsproblems orientieren wir uns an der seit N. Wiener [13] üblichen Vorgehensweise bei ähnlich gestalteten Problemen: wir führen in den nächsten drei Abschnitten die Spektraldarstellung für Operatoren der Form W und $\tilde{X}$ ein, wie sie von Mandrekar, Salehi [6,7] und Welch [12] entwickelt wurde. Dieses Hilfsmittel erlaubt es, in § 8 das optimale Empfangsfilter bei vorgegebenem festen Sendefilter zu bestimmen - eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes von N. Wiener [13] auf stationäre Operatorfolgen. Nach Einsetzen dieses optimalen Empfangsfilters in (1) erhält man ein (nicht-lineares) Funktional in W , dessen Minimierung unter gewissen Nebenbedingungen Ziel der auf § 8 folgenden Abschnitte ist. Der letzte Abschnitt schließlich ist der Übertragung der Ergebnisse auf das Modell des § 1 gewidmet.

Teil II Spektraldarstellung und Filterung stationärer Folgen von Hilbert-Schmidt-Operatoren

§ 5 Spektraldarstellung einer stationären Folge von Hilbert-Schmidt-Operatoren

In den folgenden drei Paragraphen seien H_1 , H_2 und L komplexe Hilberträume, H_1 und H_2 separabel, deren Normen und innere Produkte wir unterschiedslos mit $\|\cdot\|$ und $(\cdot, \cdot)$ bezeichnen werden, da aus dem Zusammenhang stets eindeutig hervorgeht, um welchen Raum es sich handelt. Wir benutzen die folgenden Abkürzungen: Für normierte lineare Räume $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ sei $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ die Menge der linearen Abbildungen mit in $\mathcal{X}$ gelegenen Definitionsbereich und Werten in $\mathcal{Y}$; $B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ der lineare Raum der beschränkten linearen Abbildungen $A: \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ und $\|A\| := \sup\{\|Ax\|; x \in \mathcal{X}, \|x\| \leq 1\}$. Anstelle von $B(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ schreiben wir $B(\mathcal{X})$. Die Bezeichnungen $HS(H_1, L)$, $NK(H_1)$ usw. wurden bereits in § 2 eingeführt.

Eine stationäre Folge $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ von HS-Operatoren $X_k: H_1 \longrightarrow L$ ist vollständig charakterisiert durch das Tripel (X, T_x, M_x) , wo $X = X_0$, M_x der kleinste, alle Wertebereiche der X_k umfassende Unterraum von L und $T_x: M_x \longrightarrow M_x$ der durch $X_k = T_x^k X$ eindeutig bestimmte unitäre Operator auf M_x ist.

Das Spektralmaß der Folge (X_k) definieren wir wie im Falle stationärer Vektorprozesse:

Es sei E die durch T_x eindeutig bestimmte Zerlegung der Einheit auf dem Raum M_x , d.h. eine Abbildung der Borelschen Mengen $\mathcal{B}$ des Intervalls $I = [0, 1]$ in die Menge der Projektionsoperatoren des Raums M_x mit folgenden Eigenschaften (Dunford-Schwartz [3]):

- 1.) E ist eine additive Mengenfunktion, $E(\emptyset)$ der identisch verschwindende, $E(I)$ der Einheitsoperator auf M_x .
- 2.) Für $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{B}$ ist $E(\Delta_1 \wedge \Delta_2) = E(\Delta_1) E(\Delta_2)$.

- 3.) Für alle $f \in M_X$ ist die Abbildung $\Delta \mapsto E(\Delta)f$ ein σ -additives reguläres Maß auf $\mathcal{L}$ mit Werten in M_X .
- 4.) Für beschränkte meßbare Funktionen $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ existiert das Integral

$$f(T_X) := \int_I f(\lambda) E(d\lambda)$$

als Limes entsprechender Lebesgue-Summen in $B(M_X)$ und für $f(T_X) \in B(M_X)$ gilt $\|f(T_X)\| \leq \sup \{ |f(\lambda)| ; \lambda \in I \}$.

Insbesondere: $T_X^k = \int_I e^{j2\pi\lambda k} E(d\lambda)$ für $k \in \mathbb{Z}$.

(j in $e^{j2\pi\lambda k}$ bezeichne dabei die imaginäre Einheit: $j^2 = -1$). Außerdem ist die Zuordnung $f \mapsto f(T_X)$ linear.

Definition 1 Die stationäre Folge (X_k) sei wie oben beschrieben durch (X, T_X, M_X) und E sei die Zerlegung der Einheit von T_X .

$E_X: \mathcal{L} \rightarrow HS(H_1, M_X)$ bzw. $C_X: \mathcal{L} \rightarrow NK(H_1)$ seien die durch

$$\Delta \mapsto E(\Delta) \cdot X \quad \text{bzw.} \quad \Delta \mapsto X^* E(\Delta) X = E_X(\Delta) \cdot E_X(\Delta)$$

gegebenen Abbildungen. C_X heißt das Spektralmaß der Folge (X_k) .

Bemerkung E_X ist ein c.a.o.s.-Maß mit Werten in $HS(H_1, M_X)$ im Sinne von Masani [8]. Die im folgenden dargestellte Integrationstheorie kann als eine Erweiterung der in [8] beschriebenen auf operatorwertige Funktionen angesehen werden.

Lemma 2 Sei C_X das Spektralmaß der Folge (X_k) .

Dann ist

$$\tau: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{R}_+,$$

definiert durch $\tau(\Delta) := \text{Sp}(C_X(\Delta))$, ein σ -additives

endliches Maß auf $\mathcal{S}$ und C_x , aufgefaßt als Abbildung in den Banachraum $B(H_1)$ ein bezüglich τ totalstetiges σ -additives operatorwertiges Maß.

Beweis

Da für jedes $\Delta \in \mathcal{L}$ $C_x(\Delta)$ nuklear, selbstadjungiert und positiv semidefinit ist, erhält man

$$\tau(\Delta) = \sum_k (C_x(\Delta) e_k, e_k)$$

für ein beliebiges vollständiges Orthonormalsystem (e_k) von H_1 (Gelfand-Vilenkin [4]) und aus den Eigenschaften von E

$$0 \leq \tau(\Delta) \leq \tau(I) = \|X\|_{HS}^2 < \infty$$

Aus Eigenschaft 3 von E ergibt sich dann die σ -Additivität. C_x ist nach Definition additiv und aus der Ungleichung

$$\|C_x(\Delta)\| \leq \|C_x(\Delta)\|_N,$$

sowie $\|C_x(\Delta)\|_N = \text{Sp}(C_x(\Delta))$ wegen der positiven Semidefinitheit folgt der Rest der Behauptung.

Aus den Eigenschaften der Zerlegung der Einheit erhält man weiterhin für alle ganzen Zahlen k

$$X_k = \int_{\mathcal{I}} e^{j2\pi\lambda k} E_X(d\lambda)$$

wobei das operatorwertige Integral in $B(H_1, L)$ konvergiert. In Anlehnung an Entsprechendes in der Theorie der stationären Prozesse nennen wir diese Integrale die Spektraldarstellung der Folge (X_k) .

Ist $(Y_k) \ll (X_k)$ ein gleitender Mittelwert der Folge (X_k) auf H_2 , so ist (Y_k) bestimmt durch einen "Filteroperator" $Y \in HS(H_2, M_x)$ der Form

$$Y = \sum_{i=1}^n X_{k_i} A_i, \quad A_i \in B(H_2, H_1)$$

mit $Y_k = T_x^k Y$.

Definieren wir die operatorwertige Abbildung $F: I \longrightarrow B(H_1, H_2)$ durch

$$F(\lambda) := \sum_{i=1}^n e^{-j2\pi\lambda k_i} A_i^*,$$

so ist mit

$$F \longmapsto \int F dE_x := \sum_{i=1}^n \int_I e^{j2\pi k_i \lambda} E_x(d\lambda) A_i = Y$$

eine Beziehung zwischen bestimmten operatorwertigen Abbildungen und Filteroperatoren hergestellt, die wir im folgenden zu einer isometrischen Abbildung eines Raums $L_{C_x}^2(H_1, H_2)$ operatorwertiger Funktionen und dem Raum $HS(H_2, M_x)$ ausbauen wollen und die sich als Integral im Bochnerschen Sinne (Hille-Phillips [5], Dinculeanu [2]) darstellen läßt. Wie üblich beginnen wir dabei mit dem Integral von "Treppenfunktionen".

Wir nennen eine Abbildung $F: I \longrightarrow B(H_1, H_2)$ eine Elementarfunktion, wenn F nur endlich viele Werte annimmt und für jeden Operator B aus dem Wertebereich von F die Menge $\{\lambda \in I; F(\lambda) = B\}$ aus $\mathcal{L}$, also meßbar ist. Jede solche Elementarfunktion besitzt eine Darstellung

$$(1) \quad F(\lambda) = \sum_{i=1}^n \chi_{\Delta_i}(\lambda) B_i$$

mit $B_i \in B(H_1, H_2)$, $\Delta_i \in \mathcal{L}$ und $\bigcup_{i=1}^n \Delta_i = I$, die jedoch durch F nicht eindeutig bestimmt ist. Wie in der Integrations-theorie zeigt man aber, daß das "Integral"

$$(2) \quad \int F dE_x := \sum_{i=1}^n E(\Delta_i) X \cdot B_i^*$$

ein von der speziellen Darstellung (1) unabhängiges Element

des Raumes $HS(H_2, M_x)$ ist.

Lemma 3 Sei $\mathcal{F}$ die Menge der Elementarfunktionen $F: I \rightarrow B(H_1, H_2)$ und $U_x: \mathcal{F} \rightarrow HS(H_2, M_x)$ die durch (2) gegebene Abbildung.

a) U_x ist konjugiert linear, d.h., es gilt

$$U_x(\alpha F + \beta G) = \bar{\alpha} U_x F + \bar{\beta} U_x G \text{ für } F, G \in \mathcal{F} \text{ und } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

b) Das Bild von $\mathcal{F}$ unter der Abbildung U_x liegt dicht in $HS(H_2, M_x)$

Beweis

a) ist aus der Definition von U_x unmittelbar ersichtlich. Zum Beweis von b) geben wir uns einen HS-Operator $W \in HS(H_2, M_x)$ und eine beliebige positive reelle Zahl ε vor und nehmen o.B.d.A. an, daß W wie auch X vom identisch verschwindenden Operator verschieden sind.

Nach Satz 3.6 existiert ein Operator der Form

$$Y = \sum_{k \in J} X_k A_k$$

mit einer endlichen Teilmenge $J \subset \mathbb{Z}$ und $A_k \in B(H_2, H_1)$ mit

$$\|W - Y\|_{HS} < \frac{\varepsilon}{2},$$

den wir in der Form

$$Y = \sum_{k \in J} \int_{\mathbb{R}} e^{j2\pi\lambda k} E(d\lambda) \cdot X \cdot A_k$$

schreiben. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß Y und damit mindestens eines der A_k von Null verschieden ist.

Zu den stetigen Funktionen $f_k(\lambda) := e^{j2\pi\lambda k}$ gibt es Treppenfunktionen

$$g_k(\lambda) = \sum_{n=1}^{N_k} \alpha_n^{(k)} \chi_{\Delta_n^k}(\lambda)$$

so, daß

$$\sup_{\lambda \in I} |f_k(\lambda) - g_k(\lambda)| \leq \varepsilon (2 \|X\|_{HS} \sum_{k \in J} \|A_k\|)^{-1}.$$

Die Abbildungen

$$F_k(\lambda) := \sum_{n=1}^{M_k} \chi_{\Delta_n^k}(\lambda) \tilde{\alpha}_n^{(k)} A_k^*$$

sind aus $\mathcal{F}$, ebenso deren Summe $F(\lambda) = \sum_{k \in J} F_k(\lambda)$, und es gilt wegen Eigenschaft 4 der Zerlegung der Einheit

$$\|Y - \int F dE_x\|_{HS} = \left\| \sum_{k \in J} \int_I (f_k(\lambda) - g_k(\lambda)) E(d\lambda) \otimes A_k \right\|_{HS} \leq$$

$$\leq \sum_{k \in J} \sup_{\lambda \in I} |f_k(\lambda) - g_k(\lambda)| \cdot \|X\|_{HS} \|A_k\| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

und damit $\|W - \int F dE_x\|_{HS} < \varepsilon$, w.z.b.w.

Für $F, G \in \mathcal{F}$ sei

$$(3) \quad [F, G]_{C_x} := \left(\int F dE_x \right)^* \left(\int G dE_x \right)$$

$[F, G]_{C_x}$ ist ein - außer von F und G - nur von C_x abhängiger nuklearer Operator, $[F, F]_{C_x}$ außerdem noch selbstadjungiert und positiv semidefinit, und - wie man aus Lemma 3 ersieht -

$$(4) \quad F, G \mapsto \langle F, G \rangle_{C_x} := \text{Sp}([F, G]_{C_x}) = \left\langle \int G dE_x, \int F dE_x \right\rangle_{HS}$$

ein sesquilineares Funktional auf $\mathcal{F}$, das nur von C_x abhängt und die Eigenschaften $\langle F, G \rangle_{C_x} = \overline{\langle G, F \rangle_{C_x}}$, $\langle F, F \rangle_{C_x} \geq 0$ besitzt.

Definition 4 $\mathcal{F}_{C_x}(H_1, H_2)$ sei der Quotientenraum $\mathcal{F}/\mathcal{N}$ von $\mathcal{F}$ nach dem Nullraum $\mathcal{N}$ der Abbildung U_x .

Wie bei Zufallsgrößen unterscheiden wir zwischen Klassen aus $\mathcal{F}/\mathcal{N}$ und deren Repräsentanten durch die Schreibweise: $F(\cdot)$ ist ein Repräsentant der Klasse F .

Satz 5 Die Zuordnung $F, G \longmapsto \langle F(\cdot), G(\cdot) \rangle_{C_x}$ ist ein wohl-definiertes inneres Produkt auf $\mathcal{F}_{C_x}(H_1, H_2)$ und die durch U_x induzierte Abbildung $U_{C_x}: \mathcal{F}_{C_x}(H_1, H_2) \longrightarrow HS(H_2, M_x)$ konjugiert linear und isometrisch bezüglich der Normen $\|F\|_{C_x} = \sqrt{\langle F(\cdot), F(\cdot) \rangle_{C_x}}$ auf $\mathcal{F}_{C_x}(H_1, H_2)$ und $\|\cdot\|_{HS}$ auf $HS(H_2, M_x)$. Das Bild von $\mathcal{F}_{C_x}(H_1, H_2)$ unter dieser Abbildung liegt dicht in $HS(H_2, M_x)$.

Beweis

Wegen (3) und (4) ist $\mathcal{N}$ genau die Menge der Elementarfunktionen $F(\cdot)$, für die $\langle F(\cdot), F(\cdot) \rangle_{C_x} = 0$.

$\langle F(\cdot), G(\cdot) \rangle_{C_x}$ ist also unabhängig von der Wahl der Repräsentanten $F(\cdot), G(\cdot)$ und daher ein inneres Produkt auf $\mathcal{F}_{C_x}(H_1, H_2)$. Die übrigen Behauptungen folgen dann aus Lemma 3 und der Definition von $\langle \cdot, \cdot \rangle_{C_x}$ in (4).

Bemerkung Das innere Produkt des unitären Raums

$\mathcal{F}_{C_x}(H_1, H_2)$ wird im folgenden mit $\langle F, G \rangle_{C_x}$ bezeichnet.

Durch die Schreibweise gemäß Definition 4 ist jeweils klar ersichtlich, ob es sich um das Funktional (4) oder das innere Produkt handelt.

Nach Satz 5 liefert die Vervollständigung des Raums

$\mathcal{F}_{C_x}(H_1, H_2)$ die operatorwertigen Funktionen, durch die HS-Operatoren aus $HS(H_2, M_x)$ und damit (vgl. Definition 3.5 und Satz 3.6) aus (X_k) gefilterte Folgen charakterisiert werden können. Wir werden daher im nächsten Abschnitt diese Vervollständigung kurz beschreiben, wobei wir uns im wesentlichen auf die Arbeiten von Welch [12] und Mandrekar, Salehi [6] stützen.

§ 6 Der Raum $L^2_{C_x}$

Nach Lemma 5.2 kann man die Existenz eines σ -additiven endlichen Maßes $\tau: \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{R}_+$ annehmen, bezüglich dem das Spektralmaß C_x der Folge (X_k) - aufgefaßt als Abbildung in den Banachraum $B(H_1)$ mit der Norm $\|\cdot\|$ - totalstetig ist. Für ein solches τ erhält man aus dem verallgemeinerten Satz von Radon-Nikodym ([2], § 13, Theorem 5):

Lemma 1 Es gibt eine Abbildung $S_\tau: I \longrightarrow B(H_1)$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) Für alle $x \in H_1$ ist die Abbildung $\lambda \longmapsto S_\tau(\lambda)x$ im Bochnerschen Sinne τ -integrierbar und es gilt für alle $\Delta \in \mathcal{L}$:

$$C_x(\Delta)x = \int_{\Delta} S_\tau(\lambda)x \tau(d\lambda)$$

- (2) Die Funktion $\lambda \longmapsto \|S_\tau(\lambda)\|$ ist meßbar und τ -integrierbar.

- (3) S_τ ist τ -fast eindeutig bestimmt durch die Bedingung

$$(C_x(\Delta)x, y) = \int_{\Delta} (S_\tau(\lambda)x, y) \tau(d\lambda)$$

für alle $\Delta \in \mathcal{L}$ und alle $x, y \in H_1$

Aus der dritten Eigenschaft folgt außerdem noch

Korollar 2 $S_\tau(\lambda)$ ist für τ -fast alle λ selbstadjungiert, positiv semidefinit und nuklear und die Funktion $\lambda \longmapsto \text{Sp}(S_\tau(\lambda))$ ist τ -integrierbar.

Beweis

Die Eigenschaften von $S_\tau(\lambda)$ folgen wegen (3) aus denen von $C_x(\Delta)$ und für ein vollständiges Orthonormalsystem (e_k) von H_1 erhält man aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$0 \leq \int_I \text{Sp}(S_\tau(\lambda)) \tau(d\lambda) = \int_I \sum_k (S_\tau(\lambda)e_k, e_k) \tau(d\lambda) =$$

$$= \sum_k (C_x(I) e_k, e_k) = \text{Sp}(C_x(I)) < \infty$$

Satz 3 Für alle $\lambda \in I$, für die $S_\tau(\lambda)$ als nuklearer Operator existiert, sei $S_\tau^{1/2}(\lambda)$ die Quadratwurzel von $S_\tau(\lambda)$. Dann sind die Abbildungen $\lambda \mapsto S_\tau(\lambda)$ bzw. $\lambda \mapsto S_\tau^{1/2}(\lambda)$ als Abbildungen in den Raum $\text{NK}(H_1)$ mit der Norm $\|\cdot\|_N$ bzw. den Raum $\text{HS}(H_1, H_1)$ mit der Norm $\|\cdot\|_{\text{HS}}$ im starken Sinne meßbar.

Beweis

Wir benutzen dazu den Satz von Egorov ([2], § 2, Theorem 1), wonach der punktweise Limes einer Folge stark meßbarer Abbildungen in einen metrisierbaren Raum selbst wieder stark meßbar ist.

a) Sei (e_k) ein vollständiges Orthonormalsystem des Hilbert-raums H_1 . Der Index k durchlaufe dabei die Menge $\{1, \dots, \dots, k_0\}$, wenn die Dimension von H_1 endlich und gleich k_0 ist, bzw. die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen bei nicht-endlicher Dimension. Die Abbildungen $S_n: I \rightarrow B(H_1)$ seien gegeben durch

$$S_n(\lambda)x := \sum_{k=1}^n (x, e_k) S_\tau(\lambda) e_k$$

Sie sind nach Lemma 1 im starken Sinne meßbar als Abbildungen in den Raum $\text{HS}(H_1, H_1)$. Sind nämlich

$T_k^{(i)}: I \rightarrow H_1$; $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$; "Treppenfunktionen", die für $i \rightarrow \infty$ und τ -fast alle λ gegen die Abbildungen $\lambda \mapsto S_\tau(\lambda) e_k$ konvergieren, und

$$T^{(i)}(\lambda)x := \sum_{k=1}^n (x, e_k) T_k^{(i)}(\lambda),$$

dann gilt für τ -fast alle λ :

$$\begin{aligned} \|S_n(\lambda) - T^{(i)}(\lambda)\|_{\text{HS}}^2 &= \sum_k \|S_n(\lambda) e_k - T^{(i)}(\lambda) e_k\|^2 = \\ &= \sum_{k=1}^n \|S_\tau(\lambda) e_k - T_k^{(i)}(\lambda)\|^2 \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Im Falle endlicher Dimension ist $S_{\tau}(\lambda) = S_{k_0}(\lambda)$ stark meßbar in $HS(H_1, H_1)$. Andernfalls erhält man bei festem λ , da $S_{\tau}(\lambda)$ insbesondere ein HS-Operator ist:

$$\begin{aligned} \|S_{\tau}(\lambda) - S_n(\lambda)\|_{HS}^2 &= \sum_k \|S_{\tau}(\lambda)e_k - S_n(\lambda)e_k\|^2 = \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \|S_{\tau}(\lambda)e_k\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

und damit nach dem Satz von Egorov die starke Meßbarkeit von S_{τ} , aufgefaßt als Abbildung in den Raum $HS(H_1, H_1)$.

- b) Da die Multiplikation $\lambda \mapsto f(\lambda)S_{\tau}(\lambda)$ mit einer meßbaren Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ nichts an der starken Meßbarkeit ändert, können wir o.B.d.A. annehmen, daß für τ -fast alle $\lambda \in I$ gilt: $\|S_{\tau}(\lambda)\| \leq 1$.

Die Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von Abbildungen $S_n: I \rightarrow HS(H_1, H_1)$ sei gegeben durch

$$S_0(\lambda) = 0$$

$$S_{n+1}(\lambda) = S_n(\lambda) + \frac{1}{2} [S_{\tau}(\lambda) - S_n(\lambda)S_n(\lambda)] \quad n \geq 0.$$

Die S_n sind nach a) im starken Sinn meßbar und für festes λ konvergiert die Folge der Operatoren $S_n(\lambda)$ in der Topologie der punktweisen Konvergenz gegen die Quadratwurzel $S_{\tau}^{1/2}(\lambda)$ von $S_{\tau}(\lambda)$. Außerdem gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in H_1$:

$$(4) \quad 0 \leq (S_n(\lambda)x, x) \leq (S_{n+1}(\lambda)x, x) \leq (S_{\tau}^{1/2}(\lambda)x, x)$$

(vgl. Ljusternik-Sobolev: Elemente der Funktionalanalysis, Berlin 1968)

Sei $\lambda \in I$ fest vorgegeben. Der nukleare Operator $S_{\tau}(\lambda)$ besitzt eine Darstellung

$$S_{\tau}(\lambda)x = \sum_k \alpha_k^{(0)}(x, e_k)e_k \quad x \in H_1$$

mit einem vollständigen Orthonormalsystem (e_k) von H_1 (gleiche Übereinkunft bezüglich k wie in Teil a)) und einer summierbaren Folge $(\alpha^{(k)})$ nichtnegativer reeller Zahlen. Dann sind $S_{\tau}^{1/2}(\lambda)$ und die $S_n(\lambda)$ von der Form

$$S_{\tau}^{1/2}(\lambda)x = \sum_k \sqrt{\alpha^{(k)}}(x, e_k) e_k$$

$$S_n(\lambda)x = \sum_k \alpha_n^{(k)}(x, e_k) e_k \quad ,$$

wobei die Folgen $(\alpha_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ nichtnegativer reeller Zahlen wegen (4) monoton steigend jeweils gegen $\sqrt{\alpha^{(k)}}$ konvergieren.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Ist die Dimension von H_1 nicht endlich, so gibt es eine Zahl $k_0 = k_0(\varepsilon)$ mit

$$\sum_{k > k_0} \alpha^{(k)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ist die Dimension von H_1 endlich, so sei k_0 gleich dieser Dimension. Weiterhin gibt es eine Zahl $n_1 = n_1(\varepsilon)$, so daß für $n \geq n_1$

$$\sum_{k=1}^{k_0} (\sqrt{\alpha^{(k)}} - \alpha_n^{(k)})^2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dies ergibt wegen $(\sqrt{\alpha^{(k)}} - \alpha_n^{(k)})^2 \leq \alpha^{(k)}$

$$\begin{aligned} \|S_{\tau}^{1/2}(\lambda) - S_n(\lambda)\|_{HS}^2 &= \sum_k \|(S_{\tau}^{1/2}(\lambda) - S_n(\lambda))e_k\|^2 = \\ &= \sum_k (\sqrt{\alpha^{(k)}} - \alpha_n^{(k)})^2 \leq \sum_{k=1}^{k_0} (\sqrt{\alpha^{(k)}} - \alpha_n^{(k)})^2 + \sum_{k > k_0} \alpha^{(k)} < \varepsilon \quad , \end{aligned}$$

wobei der letzte Summand im Falle endlicher Dimension von H_1 entfällt, und damit die punktweise Konvergenz der Folge der Abbildungen $\lambda \mapsto S_n(\lambda)$ in der Norm $\|\cdot\|_{HS}$ gegen $S_{\tau}^{1/2}$. Die starke Meßbarkeit der S_n ergibt dann die der Abbildung $S_{\tau}^{1/2} : I \rightarrow HS(H_1, H_1)$.

- c) Der nukleare Operator $A: H_1 \rightarrow H_1$ sei von der Form $A = B_2^* B_1$ mit $B_1, B_2 \in \text{HS}(H_1, H_1)$. A besitze nach Lemma 2.3 die Darstellung

$$Ax = \sum_n \alpha_n(x, x_n) y_n$$

mit orthonormierten Folgen $(x_n), (y_n)$ in H_1 und einer summierbaren Folge positiver reeller Zahlen (α_n) .

Dann gilt

$$\begin{aligned} \|A\|_N &= \sum_n \alpha_n = \sum_n |(Ax_n, y_n)| \leq \sum_n \|B_1 x_n\| \cdot \|B_2 y_n\| \leq \\ &\leq \|B_1\|_{\text{HS}} \|B_2\|_{\text{HS}} \end{aligned}$$

Diese Ungleichung, angewandt auf die Operatoren $S_n(\lambda)$, $S_\tau(\lambda)$ aus Teil b) liefert für festes, aber beliebiges λ :

$$\|S_\tau(\lambda) - S_n(\lambda)S_n(\lambda)\|_N \leq (\|S_\tau^{1/2}(\lambda)\|_{\text{HS}} + \|S_n(\lambda)\|_{\text{HS}}).$$

$$\|S_\tau^{1/2}(\lambda) - S_n(\lambda)\|_{\text{HS}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

und wegen der starken Meßbarkeit der Abbildung $\lambda \mapsto S_n(\lambda)S_n(\lambda)$ in $\text{NK}(H_1)$ die von S_τ in $\text{NK}(H_1)$.

Korollar 4 Die Abbildung $\lambda \mapsto S_\tau(\lambda)$ ist als Abbildung in die Banachräume $B(H_1)$, $\text{HS}(H_1, H_1)$ und $\text{NK}(H_1)$ im Bochner-schen Sinne τ -integrierbar und es gilt

$$(5) \quad C_x(\Delta) = \int_\Delta S_\tau(\lambda) \tau(d\lambda) \quad \Delta \in \mathfrak{L}$$

in jeder der obigen Normen.

Beweis

Wir benutzen Theorem 3.7.4 aus [5]: Eine Abbildung $x: I \rightarrow \mathfrak{X}$ in einen Banachraum $\mathfrak{X}$ (mit Norm $\|\cdot\|_{\mathfrak{X}}$) ist genau dann τ -integrierbar im Bochnerschen Sinn, wenn

x stark meßbar und $\lambda \mapsto \|x(\lambda)\|_{\mathcal{L}}^2$ τ -integrierbar ist.

Wegen $\|S_{\tau}(\lambda)\| \leq \|S_{\tau}(\lambda)\|_{HS} \leq \|S_{\tau}(\lambda)\|_N$ braucht das nur für $\mathcal{X} = NK(H_1)$ nachgewiesen werden. Die starke Meßbarkeit war die Aussage des Satzes 3 und die τ -Integrierbarkeit von $\lambda \mapsto \|S_{\tau}(\lambda)\|_N$ folgt aus Korollar 2, da

$\|S_{\tau}(\lambda)\|_N = \text{Sp}(S_{\tau}(\lambda))$. (5) schließlich folgt aus (1).

Die Integrierbarkeit von S_{τ} im Raum $B(H_1)$ und (5) sind die wesentlichen Voraussetzungen für den nachstehenden Satz 5 aus der Arbeit von Welch [12]. Zuvor noch einige weitere Definitionen:

Es sei $\mathcal{L}^2(\tau, HS(H_1, H_2))$ der lineare Raum der stark meßbaren Abbildungen $f: I \rightarrow HS(H_1, H_2)$, für die die Funktion $\lambda \mapsto \|f(\lambda)\|_{HS}^2$ τ -integrierbar ist. (Für die Eigenschaften dieses Raums s. Dinculeanu [2], § 12).

$\mathcal{L}^2(\tau, S_{\tau}, H_1, H_2)$ sei die Menge der Abbildungen $F: I \rightarrow L(H_1, H_2)$ mit den folgenden beiden Eigenschaften:

(6) Für τ -fast alle $\lambda \in I$ ist der Wertebereich von $S_{\tau}^{\wedge 2}(\lambda)$ im Definitionsbereich von $F(\lambda)$ enthalten und die Hintereinanderschaltung $F(\lambda)S_{\tau}^{\wedge 2}(\lambda)$ ist Element von $HS(H_1, H_2)$.

(7) Die Abbildung $\lambda \mapsto F(\lambda)S_{\tau}^{\wedge 2}(\lambda)$ ist Element von $\mathcal{L}^2(\tau, HS(H_1, H_2))$.

Schließlich sei noch $L^2(\tau, S_{\tau}, H_1, H_2)$ die Menge der Äquivalenzklassen von Elementen $F(\cdot), G(\cdot) \dots$ aus $\mathcal{L}^2(\tau, S_{\tau}, H_1, H_2)$ bezüglich der Relation

(8) $F(\cdot) \sim G(\cdot) \Leftrightarrow F(\lambda)S_{\tau}^{\wedge 2}(\lambda) = G(\lambda)S_{\tau}^{\wedge 2}(\lambda)$

für τ -fast alle λ .

Bezüglich der Bezeichnung von Klassen und deren Repräsentanten sei die gleiche Vereinbarung getroffen wie in

Definition 5.4. Es gilt der

Satz 5 (Welch [12])

$L^2(\tau, S_\tau, H_1, H_2)$ ist ein Hilbertraum, wenn man ihn mit dem inneren Produkt

$$(9) \quad \langle F, G \rangle_\tau := \int_\tau \langle F(\lambda) S_\tau^{-1/2}(\lambda), G(\lambda) S_\tau^{-1/2}(\lambda) \rangle_{HS} \tau(d\lambda)$$

versieht.

Die Norm eines Elements $F \in L^2(\tau, S_\tau, H_1, H_2)$ sei mit $\|F\|_\tau$ bezeichnet.

Lemma 6 Für jedes σ -additive Maß τ auf $\mathcal{B}$, bezüglich dem C_x totalstetig ist, umfaßt $L^2(\tau, S_\tau, H_1, H_2)$ die Menge

$\mathcal{F}_{C_x}(H_1, H_2)$ (aus Def. 5.4) und es gilt

$$(10) \quad \langle F, G \rangle_{C_x} = \langle F, G \rangle_\tau$$

für alle $F, G \in \mathcal{F}_{C_x}(H_1, H_2)$.

Beweis

$\lambda \mapsto S_\tau^{-1/2}(\lambda)$ ist ein Element von $\mathcal{L}^2(\tau, HS(H_1, H_2))$, denn sie ist nach Satz 3 stark meßbar und $\|S_\tau^{-1/2}(\cdot)\|_{HS}^2 = \text{Sp}(S_\tau(\cdot))$ ist nach Korollar 2 τ -integrierbar.

Für eine Elementarfunktion

$$F(\lambda) = \sum_{i=1}^n \chi_{\Delta_i}(\lambda) A_i, \quad \Delta_i \in \mathcal{B}, \quad A_i \in B(H_1, H_2)$$

ist die Abbildung $\lambda \mapsto F(\lambda) S_\tau^{-1/2}(\lambda)$ dann ebenfalls stark meßbar und

$$\lambda \mapsto \|F(\lambda) S_\tau^{-1/2}(\lambda)\|_{HS}^2 \in \left(\sum_{i=1}^n \|A_i\| \right) \|S_\tau^{-1/2}(\lambda)\|_{HS}^2$$

τ -integrierbar. Daher ist die Menge $\mathcal{F}$ der Elementarfunktionen in $\mathcal{L}^2(\tau, S_\tau, H_1, H_2)$ enthalten und es ist nur noch zu zeigen, daß für Elementarfunktionen $F(\cdot), G(\cdot)$ gilt

$$(11) \quad \left\langle \int G(\cdot) dE_x, \int F(\cdot) dE_x \right\rangle_{HS} = \\ = \int_I \left\langle F(\lambda) S_{\tau}^{\mu_2}(\lambda), G(\lambda) S_{\tau}^{\mu_2}(\lambda) \right\rangle_{HS} \tau(d\lambda)$$

Wegen der Linearität kann man sich auf den Fall $F(\lambda) = \chi_{\Delta}(\lambda)A$ und $G(\lambda) = \chi_{\tilde{\Delta}}(\lambda)B$ beschränken. Die linke Seite von (11) wird dann gleich $\text{Sp}(AC_X(\Delta \cap \tilde{\Delta})B^*)$ und aus der rechten ergibt sich wegen der Stetigkeit der Abbildungen $\text{Sp}(\cdot): \text{NK}(H_2) \rightarrow \mathbb{C}$ und $Y \mapsto AYB^*$ von $\text{NK}(H_1)$ in $\text{NK}(H_2)$:

$$\begin{aligned} & \int_I \left\langle F(\lambda) S_{\tau}^{\mu_2}(\lambda), G(\lambda) S_{\tau}^{\mu_2}(\lambda) \right\rangle_{HS} \tau(d\lambda) = \\ &= \int_{\Delta \cap \tilde{\Delta}} \left\langle AS_{\tau}^{\mu_2}(\lambda), BS_{\tau}^{\mu_2}(\lambda) \right\rangle_{HS} \tau(d\lambda) = \\ &= \int_{\Delta \cap \tilde{\Delta}} \left\langle S_{\tau}^{\mu_2}(\lambda)B^*, S_{\tau}^{\mu_2}(\lambda)A^* \right\rangle_{HS} \tau(d\lambda) = \\ &= \int_{\Delta \cap \tilde{\Delta}} \text{Sp}(AS_{\tau}(\lambda)B^*) \tau(d\lambda) = \text{Sp}\left(A \int_{\Delta \cap \tilde{\Delta}} S_{\tau}(\lambda) \tau(d\lambda) B^*\right) = \\ &= \text{Sp}(AC_X(\Delta \cap \tilde{\Delta})B^*), \end{aligned}$$

und damit (11).

Satz 7 (vgl. Mandrekar, Salehi [6])

Voraussetzungen wie in Lemma 6. Dann liegt die Menge

$\mathcal{F}_{C_X}(H_1, H_2)$ dicht in $L^2(\tau, S_{\tau}, H_1, H_2)$.

Beweis

Die Voraussetzungen des Main Theorem II aus [6] sind dann erfüllt, wenn gezeigt werden kann, daß es zu jedem $F(\cdot)$ aus $\mathcal{L}^2(\tau, S_{\tau}, H_1, H_2)$ ein $G(\cdot)$ aus der gleichen Menge mit

$F(\cdot) \sim G(\cdot)$ gibt, das im Sinne der Definition 2.1 aus [6] meßbar ist, d.h., wenn es eine Folge von stark meßbaren Abbildungen $B_n: I \rightarrow B(H_1, H_2)$ mit

$$\|G(\lambda)x - B_n(\lambda)x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

für τ -fast alle $\lambda \in I$ und alle x aus dem jeweiligen Definitionsbereich von $G(\lambda)$ gibt. Dies ist aber im vorliegenden Falle erfüllt, denn die verallgemeinerte Inverse $(S_\tau^{\lambda_2}(\lambda))^-$ ([6], Definition 2.11) ist in diesem Sinne meßbar ([6], Korollar 2.13) und daher auch $G(\lambda) = F(\lambda)S_\tau^{\lambda_2}(\lambda)(S_\tau^{\lambda_2}(\lambda))^-$, weil $F(\cdot)S_\tau^{\lambda_2}(\cdot)$ nach Voraussetzung stark meßbar und $F(\cdot) \sim G(\cdot)$ ist.

Korollar 8 $L^2(\tau, S_\tau, H_1, H_2)$ ist ein von der speziellen Darstellung

$$C_x(\Delta) = \int_{\Delta} S_\tau(\lambda) \tau(d\lambda)$$

unabhängiger Hilbertraum und gleich der Vervollständigung des unitären Raums $\mathcal{F}_{C_x}(H_1, H_2)$ in der Norm $\|F\|_{C_x} = \sqrt{\langle F, F \rangle_{C_x}}$.

Beweis

folgt unmittelbar aus Lemma 6 und Satz 7.

Definition 9 Die Vervollständigung des Raums $\mathcal{F}_{C_x}(H_1, H_2)$ sei mit $L_{C_x}^2(H_1, H_2)$ bezeichnet, seine Norm und inneres Produkt wieder mit $\|\cdot\|_{C_x}$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_{C_x}$.

§ 7 Filterung stationärer Folgen von Hilbert-Schmidt-Operatoren

Sei wieder $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ eine stationäre Folge von HS-Operatoren auf H_1 , beschrieben durch (X, T_x, M_x) und C_x das Spektralmaß dieser Folge. Da jede gefilterte Folge $(Y_k) \ll (X_k)$ auf H_2 eindeutig bestimmt ist durch ein $Y \in HS(H_2, M_x)$ mit $Y_k = T_x^k Y$, erhält man wie in der Nachrichtentechnik die Charakterisierung eines Filters durch eine Funktion aus dem

Satz 1 Die konjugiert lineare isometrische Fortsetzung der Abbildung $U_{C_x} : \mathcal{F}_{C_x}(H_1, H_2) \longrightarrow HS(H_2, M_x)$ ist surjektiv

Beweis

folgt direkt aus Satz 5.5, Satz 6.7 und Korollar 6.8.

Wie für Treppenfunktionen schreiben wir

$$(1) \quad U_{C_x} F =: \int F dE_x$$

und bezeichnen dieses "Integral" als die Spektraldarstellung des Operators $Y = U_{C_x} F$ bzw. der durch ihn bestimmten Folge $(Y_k) \ll (X_k)$ bezüglich (X_k) .

Das Spektralmaß C_y der Folge (Y_k) ist gegeben durch

$C_y(\Delta) = Y^* E(\Delta) Y$ mit der Zerlegung der Einheit E von T_x .

Satz 2 $(X_k), (Y_k), Y = \int F dE_x$ und C_y wie oben. Das Spektralmaß C_x von (X_k) besitze eine Dichte S_x bezüglich eines Maßes τ . Dann besitzt auch C_y eine Dichte S_y bezüglich τ , die τ -fast eindeutig bestimmt und für τ -fast alle λ gleich

$$(2) \quad S_y(\lambda) = (F(\lambda) S_x^{\frac{1}{2}}(\lambda)) (F(\lambda) S_x^{\frac{1}{2}}(\lambda))^*$$

ist, wobei $F(\cdot) \in F$.

Beweis

Die Abbildung $\lambda \mapsto S_Y(\lambda)$ in $NK(H_2)$ ist wegen

$$\|S_Y(\lambda)\|_N = \|F(\lambda)S_X^{\wedge 2}(\lambda)\|_{HS}^2 \quad F(\cdot) \in \mathcal{L}^2(\tau, S_X, H_1, H_2)$$

stark meßbar und τ -integrierbar, wie man analog den Beweisen zu Satz 6.3 und Korollar 6.4 zeigen kann, so daß nur noch

$$(3) \quad C_Y(\Delta) = \int_{\Delta} S_Y(\lambda) \tau(d\lambda)$$

für alle $\Delta \in \mathcal{B}$ nachzuweisen ist. Daraus folgt auch die Eindeutigkeit bis auf τ -Nullmengen.

Da die lineare Abbildung $S \mapsto ASB^*$ von $NK(H_1)$ in $NK(H_2)$ mit $A, B \in B(H_1, H_2)$ stetig ist, gilt für alle $\Delta \in \mathcal{B}$ ([5], Theorem 3.7.12):

$$(4) \quad \int_{\Delta} AS_X(\lambda)B^* \tau(d\lambda) = A \int_{\Delta} S_X(\lambda) \tau(d\lambda) B^* = AC_X(\Delta)B^*$$

und daraus folgt (3) in den Fällen, in denen S_Y in (2) durch Elementarfunktionen $F(\cdot)$ definiert ist, wie im Beweis zu Lemma 6.6.

Ist $F(\cdot) \in \mathcal{L}^2(\tau, S_X, H_1, H_2)$ beliebig und $(F_n(\cdot))$ eine Folge von Elementarfunktionen mit $\|F - F_n\|_{C_X} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ und

$Y_n := \int F_n dE_X$, $f_n(\lambda) := F_n(\lambda)S_X^{\wedge 2}(\lambda)$, $f(\lambda) := F(\lambda)S_X^{\wedge 2}(\lambda)$, so konvergiert $Y_n^* E(\Delta) Y_n$ in $NK(H_2)$ gegen $C_Y(\Delta)$, wegen (4) ist

$$\int_{\Delta} f_n(\lambda) f_n^*(\lambda) \tau(d\lambda) = Y_n^* E(\Delta) Y_n$$

und aus der Ungleichung $\|AB\|_N \leq \|A\|_{HS} \|B\|_{HS}$ für HS-Operatoren A, B sowie der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung erhält man

$$\begin{aligned}
 & \left\| \int_{\Delta} S_Y(\lambda) \tau(d\lambda) - \int_{\Delta} f_n(\lambda) f_n^*(\lambda) \tau(d\lambda) \right\|_N \leq \\
 & \leq \int_{\Delta} \|S_Y(\lambda) - f_n(\lambda) f_n^*(\lambda)\|_N \tau(d\lambda) \leq \\
 & \leq \left\{ \int_{\Delta} [\|f(\lambda)\|_{HS}^2 + \|f_n(\lambda)\|_{HS}^2] \tau(d\lambda) \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_{\Delta} \|f(\lambda) - f_n(\lambda)\|_{HS}^2 \tau(d\lambda) \right\}^{1/2} \leq \\
 & \leq (\|F\|_{C_X} + \|F_n\|_{C_X}) \cdot \|F - F_n\|_{C_X} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,
 \end{aligned}$$

insgesamt also (3).

Wir betrachten nunmehr hintereinandergeschaltete Filterungen.

Sei H_3 ein weiterer separabler Hilbertraum und $M_Y \subset M_X$ die abgeschlossene lineare Hülle der Bildmengen der Y_k in L .

$G \mapsto \int G dE_Y$ sei die Spektraldarstellung

$U_{C_Y} : L_{C_Y}^2(H_2, H_3) \longrightarrow HS(H_3, M_Y)$ nach Satz 1.

$(Z_k) \ll (Y_k)$ sei eine weitere gefilterte Folge; $Z_k = T_X^k Z$

mit $Z = \int G dE_Y$, $G \in L_{C_Y}^2(H_2, H_3)$.

Satz 3 Sind $F(\cdot)$ bzw. $G(\cdot)$ Repräsentanten der Klassen F bzw. G mit $Y = \int F dE_X$ und $Z = \int G dE_Y$, S_X und τ wie oben,

dann ist $\lambda \mapsto G(\lambda)F(\lambda)$ ein wohldefiniertes Element von

$\mathcal{L}^2(\tau, S_X, H_1, H_3)$ und für die zugehörige Klasse GF in

$L_{C_X}^2(H_1, H_3)$ gilt

$$(5) \quad Z = \int GF dE_X.$$

Beweis

a) Ist $B \in HS(H_1, H_2)$, $Bx = \sum_k \lambda_k(x, x_k) f_k$ mit orthonormierten Folgen (x_k) aus H_1 und (f_k) aus H_2 und einer quadratisch summierbaren Folge (λ_k) positiver reeller Zahlen, so ist die Quadratwurzel des Operators $A = BB^*$ ein HS-Operator von der Gestalt $A^{1/2} f = \sum_k \lambda_k(f, f_k) f_k$, $f \in H_2$. Daraus folgt, daß der Wertebereich von B und $A^{1/2}$ der gleiche ist und für jedes $D \in L(H_1, H_2)$:

$DB \in HS(H_1, H_3)$ genau dann, wenn $DA^{1/2} \in HS(H_2, H_3)$ und $\|DB\|_{HS} = \|DA^{1/2}\|_{HS}$. Dies angewandt auf $B = F(\lambda)S_x^{1/2}(\lambda)$ und $A = S_y(\lambda)$ liefert uns für beliebiges $F(\cdot)$ aus $\mathcal{L}^2(\tau, S_x, H_1, H_2)$, S_y durch F wie in (2) gegeben:
Für jedes $H(\cdot) \in \mathcal{L}^2(\tau, S_y, H_2, H_3)$ und τ -fast alle λ ist $H(\lambda)F(\lambda)S_x^{1/2}(\lambda)$ wohldefiniert und

$$(6) \quad \|H(\lambda)F(\lambda)S_x^{1/2}(\lambda)\|_{HS} = \|H(\lambda)S_y^{1/2}(\lambda)\|_{HS}.$$

Ist $H(\cdot)$ insbesondere eine Elementarfunktion, so ist $H(\cdot)F(\cdot)S_x^{1/2}(\cdot)$ stark meßbar bezüglich $\mathbb{H}$ und daher $H(\cdot)F(\cdot)$ aus $\mathcal{L}^2(\tau, S_x, H_1, H_3)$.

Das gilt aber auch für beliebiges $H(\cdot) \in \mathcal{L}^2(\tau, S_y, H_2, H_3)$. Denn ist $(G_n(\cdot))$ eine Folge von Elementarfunktionen mit $\|H - G_n\|_{C_y} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, so konvergieren die $G_n(\cdot)S_y^{1/2}(\cdot)$ in $\mathcal{L}^2(\tau, HS(H_2, H_3))$ gegen $H(\cdot)S_y^{1/2}(\cdot)$ und ([2], § 12, 3, Proposition 16) es gibt eine Teilfolge $(G_{n_k}(\cdot))$, so daß für τ -fast alle λ $G_{n_k}(\lambda)S_y^{1/2}(\lambda)$ in $HS(H_2, H_3)$ gegen $H(\lambda)S_y^{1/2}(\lambda)$ konvergiert.

Die Abbildungen $\lambda \mapsto G_{n_k}(\lambda)F(\lambda)S_x^{1/2}(\lambda)$ sind stark meßbar und konvergieren wegen (6) τ -fast überall punktweise in $HS(H_1, H_3)$ gegen $H(\cdot)F(\cdot)S_x^{1/2}(\cdot)$. Aus dem Satz von Egorov folgt damit $H(\cdot)F(\cdot) \in \mathcal{L}^2(\tau, S_x, H_1, H_3)$ und aus (6) für die zugehörige Äquivalenzklasse HF :

$$(7) \quad \|HF\|_{C_x} = \|H\|_{C_y}$$

- b) Für eine Elementarfunktion $\tilde{H}(\cdot)$, die die paarweise verschiedenen Operatoren $B_1, B_2, \dots, B_n$ als Werte annimmt, sei $\sigma(\tilde{H}(\cdot)) := \sum_{i=1}^n \|B_i\|$. Wie man sich leicht überzeugt, gilt dann $\|\tilde{H}F\|_{C_x} \leq \sigma(\tilde{H}(\cdot)) \cdot \|F\|_{C_x}$.

Sei nunmehr $Y = \int F dE_x$ und $Z = \int G dE_y$, außerdem $\tilde{F}(\cdot)$ und $\tilde{G}(\cdot)$ Elementarfunktionen mit Werten in $B(H_1, H_2)$ bzw. $B(H_2, H_3)$. Dann erhält man aus dieser Ungleichung und (7):

$$(8) \|GF - \tilde{G}\tilde{F}\|_{C_x} \leq \|G - \tilde{G}\|_{C_y} + \sigma(\tilde{G}(\cdot)) \|F - \tilde{F}\|_{C_x}$$

$$(9) \|Z - \int \tilde{G}\tilde{F} dE_x\|_{HS} \leq \|Z - \int \tilde{G} dE_y\|_{HS} + \|\int \tilde{G} dE_y - \int \tilde{G}\tilde{F} dE_x\|_{HS}.$$

Der erste Summand der rechten Seite von (9) ist gleich $\|G - \tilde{G}\|_{C_y}$ und für den zweiten ergibt sich aus der Definition des Integrals für Elementarfunktionen:

$$\|\int \tilde{G} dE_y - \int \tilde{G}\tilde{F} dE_x\|_{HS} \leq \sigma(\tilde{G}(\cdot)) \|F - \tilde{F}\|_{C_x}$$

Zusammen mit $\|GF - \tilde{G}\tilde{F}\|_{C_x} = \|\int GF dE_x - \int \tilde{G}\tilde{F} dE_x\|_{HS}$ erhält man aus (8) und (9) die Ungleichung

$$\|Z - \int GF dE_x\|_{HS} \leq 2 (\|G - \tilde{G}\|_{C_y} + \sigma(\tilde{G}(\cdot)) \|F - \tilde{F}\|_{C_x})$$

und, da nach Satz 6.7 die rechte Seite beliebig klein werden kann, auch die Behauptung (5).

Zur Spektraldarstellung des Empfangssignals benötigen wir schließlich noch die Darstellung eines Filters auf der Summe zweier orthogonaler stationärer Folgen. Seien also $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ und $(Y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ stationäre Folgen von HS-Operatoren auf H_1 mit Werten in L , beschrieben durch die Tripel (X, T_x, M_x) und (Y, T_y, M_y) . Außerdem sei vorausgesetzt, daß für alle $k, l \in \mathbb{Z}$ und alle $x, y \in H_1$ die Elemente $X_k x$ und $Y_l y$ oder gleichbedeutend damit die Unterräume M_x und M_y von L zueinander orthogonal sind.

Sei ferner T die direkte Summe der unitären Abbildungen T_x und T_y , definiert auf der direkten Summe $M_x \oplus M_y$ der beiden Unterräume, und (Z_k) die stationäre Folge der Operatoren

$Z_k := X_k + Y_k$. Es ist $Z_k = T^k Z$ mit $Z = X_0 + Y_0 \in \text{HS}(H_1, M_Z)$, wo $M_Z \subset M_{X_k} \oplus M_{Y_k}$ die abgeschlossene lineare Hülle der Bildmengen der Z_k ist.

Wie man leicht sieht, besitzt die Folge (Z_k) das Spektralmaß $C_Z = C_X + C_Y$. Sind die Spektralmaße C_X und C_Y von (X_k) und (Y_k) totalstetig bezüglich des gleichen Maßes τ - was man stets o.B.d.A. annehmen kann - mit Dichten S_X und S_Y , dann besitzt (Z_k) die Spektraldichte $S_Z = S_X + S_Y$ bezüglich τ . Unter diesen Voraussetzungen erhält man den

Satz 4 Jedes $F_Z \in L^2_{C_Z}(H_1, H_2)$ enthält ein Element $F(\cdot)$ aus $\mathcal{L}^2(\tau, S_Z, H_1, H_2)$, das sowohl in $\mathcal{L}^2(\tau, S_X, H_1, H_2)$ als auch in $\mathcal{L}^2(\tau, S_Y, H_1, H_2)$ liegt. Für die dieses $F(\cdot)$ umfassenden Klassen $F_X \in L^2_{C_X}(H_1, H_2)$ und $F_Y \in L^2_{C_Y}(H_1, H_2)$ gilt

$$(10) \quad \int F_Z dE_Z = \int F_X dE_X + \int F_Y dE_Y,$$

wobei die Integrale die entsprechenden Spektraldarstellungen nach Satz 1 bezeichnen.

Beweis

- a) Für Elementarfunktionen ist die Behauptung richtig, wie man aus der Definition des Integrals unmittelbar ersieht. Außerdem zeigt man mit Hilfe von Lemma 2.1, daß für lineare beschränkte Operatoren aus $B(H_1, H_2)$ und daher für die Werte $F(\lambda)$ einer Elementarfunktion wegen $S_Z = S_X + S_Y$ gilt:

$$(11) \quad \|F(\lambda) S_Z^{1/2}(\lambda)\|_{\text{HS}}^2 = \|F(\lambda) S_X^{1/2}(\lambda)\|_{\text{HS}}^2 + \|F(\lambda) S_Y^{1/2}(\lambda)\|_{\text{HS}}^2.$$

- b) Sei nun $F_Z \in L^2_{C_Z}(H_1, H_2)$ beliebig und $\tilde{F}(\cdot) \in \mathcal{L}^2(\tau, S_Z, H_1, H_2)$ ein Repräsentant dieser Klasse, außerdem $(F_n(\cdot))$ eine Folge von Elementarfunktionen, deren zugehörige Klassen F_n in $L^2_{C_Z}(H_1, H_2)$ gegen F_Z konvergieren.

Dann gibt es - vgl. den Beweis zu Satz 3 - eine Teilfolge

$(F_{n_k}(.))$, so daß für τ -fast alle λ die $F_{n_k}(\lambda)S_z^{\wedge 2}(\lambda)$ in $HS(H_1, H_2)$ gegen $\tilde{F}(\lambda)S_z^{\wedge 2}(\lambda)$ konvergieren.

Sei D_λ die Menge aller $x \in H_1$, für die die Folge $(F_{n_k}(\lambda)x)$ konvergiert und $F(\lambda): D_\lambda \longrightarrow H_2$ definiert durch

$F(\lambda)x := \lim_{k \rightarrow \infty} F_{n_k}(\lambda)x$. Dann ist $\lambda \mapsto F(\lambda)$ ebenfalls Repräsentant von F_z , denn auf dem Bild von $S_z^{\wedge 2}(\lambda)$ sind $\tilde{F}(\lambda)$ und $F(\lambda)$ identisch.

- c) Wegen (11) sind $(F_n(.))S_x^{\wedge 2}(.)$ und $(F_n(.))S_y^{\wedge 2}(.)$ Cauchy-Folgen in $\mathcal{L}^2(\tau, HS(H_1, H_2))$ und konvergieren daher gegen Elemente $f(.)$ und $g(.)$ aus diesem Raum. Da die $F_n(.)$ aber sowohl in $\mathcal{L}^2(\tau, S_x, H_1, H_2)$ als auch in $\mathcal{L}^2(\tau, S_y, H_1, H_2)$ liegen, ist bis auf eine τ -Nullmenge $f(.) = \tilde{F}_1(.))S_x^{\wedge 2}(.)$ und $g(.) = \tilde{F}_2(.))S_y^{\wedge 2}(.)$ mit $\tilde{F}_1(.) \in \mathcal{L}^2(\tau, S_x, H_1, H_2)$ und $\tilde{F}_2(.) \in \mathcal{L}^2(\tau, S_y, H_1, H_2)$. Wegen (11) konvergieren die Teilfolgen $(F_{n_k}(.))S_x^{\wedge 2}(.)$ bzw. $(F_{n_k}(.))S_y^{\wedge 2}(.)$ punktweise τ -fast überall in $HS(H_1, H_2)$ gegen $\tilde{F}_1(.))S_x^{\wedge 2}(.)$ bzw. $\tilde{F}_2(.))S_y^{\wedge 2}(.)$. Daraus folgt aber, daß $F(\lambda)$ und $\tilde{F}_1(\lambda)$ auf dem Bild von $S_x^{\wedge 2}(\lambda)$ bzw. $F(\lambda)$ und $\tilde{F}_2(\lambda)$ auf dem Bild von $S_y^{\wedge 2}(\lambda)$ für τ -fast alle λ übereinstimmen, also $F(.) \in \mathcal{L}^2(\tau, S_x, H_1, H_2) \cap \mathcal{L}^2(\tau, S_y, H_1, H_2)$.
- (10) folgt daraus sofort, weil diese Beziehung nach a) bereits für Elementarfunktionen gilt.

§ 8 Der Übertragungsfehler in Spektraldarstellung. Optimales Empfangsfilter.

Das Übertragungssystem aus § 4 stellt sich nun wie folgt dar: Sei C_x das Spektralmaß des Eingangssignals (X_k) auf dem Raum H und $(W_k) \ll (X_k)$ das Sendesignal auf K_0 ,

$W_k = T_x^k W$ mit $W \in HS(K_0, M_x)$. Zu diesem W gibt es nach Satz 7.1 genau ein $F \in L_{C_x}^2(H, K_0)$ mit $W = \int F dE_x$.

Die anschließende Übertragung $\tilde{W}_k = W_k J$ auf den Raum K_p mit der kanonischen Einbettung $J: K_p \rightarrow K_0$ ist auch eine Filterung, nämlich ein gleitender Mittelwert. Nach Satz 7.3 erhält man für $\tilde{W}$ mit $\tilde{W}_k = T_x^k \tilde{W}$:

$$\tilde{W} = \int J^* F dE_x,$$

wo J^* die Abbildung $\lambda \mapsto G(\lambda) = J^*$ bezeichnet.

Da die Werte der Abbildungen $\tilde{W}_k$ in M_x liegen, ist (Z_k) mit $Z_k = \tilde{W}_k + N_k$ nach den Voraussetzungen des § 4 Summe zweier orthogonaler stationärer Folgen und das Empfangsfilter $\tilde{X} \in HS(H, M_z)$ ist nach den Sätzen 7.3 und 7.4 gegeben durch

$$\tilde{X} = \int G dE_z = \int G_1 dE_N + \int G_2 J^* F dE_x,$$

wobei die Klassen $G \in L_{C_z}^2(K_p, H)$, $G_1 \in L_{C_N}^2(K_p, H)$, $G_2 \in L_{C_W}^2(K_p, H)$ von der gleichen Abbildung $\lambda \mapsto G(\lambda)$ erzeugt werden.

C_z , C_N und C_W sind dabei die Spektralmaße der Folgen (Z_k) , (N_k) und $(\tilde{W}_k)$ und die Integrale die entsprechenden Spektraldarstellungen nach Satz 7.1.

Die Werte der Abbildung $\tilde{X}_1 := \int G_1 dE_N$ liegen in M_N und sind daher orthogonal zu denen von $\tilde{X}$, so daß wir für den Übertragungsfehler aus (4.1) erhalten:

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{X} - X\|_{HS}^2 &= \|\tilde{X}\|_{HS}^2 - 2\operatorname{Re} \langle X, \int G_2 J^* F dE_x \rangle_{HS} + \|X\|_{HS}^2 = \\
 (1) \quad &= \|G\|_{C_z}^2 - 2\operatorname{Re} \langle I_H, G_2 J^* F \rangle_{C_x} + \|X\|_{HS}^2,
 \end{aligned}$$

wobei I_H die Abbildung ist, die jedem $\lambda \in I$ den Einheitsoperator in H zuordnet. Nach Satz 7.4 kann man G_2 als "Version" von G im Raum $L_{C_z}^2(K_p, H)$ auffassen. Daher werden wir anstelle von G_2 ebenfalls G schreiben. Da $\|X\|_{HS}^2$ für das vorliegende Problem eine Konstante ist, kann man anstelle des Fehlers (1) auch das Funktional

$$(2) \quad \tilde{D}(F, G) = \|G\|_{C_z}^2 - 2\operatorname{Re} \langle I_H, G J^* F \rangle_{C_x}$$

betrachten, welches es somit in Abhängigkeit von $F \in L_{C_x}^2(H, K_0)$ und $G \in L_{C_z}^2(K_p, H)$, sowie noch zu formulierenden Beschränkungen an F zu minimieren gilt. Die durch W bzw. X eindeutig bestimmten Größen bezeichnen wir ebenfalls wieder als Sende- und Empfangsfilter (u.U. mit dem Zusatz "in Spektraldarstellung").

Wir behandeln zunächst das Wiener'sche Problem für stationäre Operatorfolgen, nämlich die Bestimmung des Empfangsfilters, welches das Funktional $D(F, \cdot)$ bei fest vorgegebenem Sendefilter F minimiert. (Im Falle stationärer Vektorprozesse (X_k) und (N_k) ist dies das optimale nicht realisierbare Empfangsfilter, s. [13]). Ein solches optimales Empfangsfilter existiert, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 1 $\tilde{D}$ wie in (2), $F \in L_{C_x}^2(H, K_0)$ fest vorgegeben. Dann besitzt $\tilde{D}$, als Funktion der Variablen G ein eindeutig bestimmtes Minimum $G_0 = G_0(F) \in L_{C_z}^2(K_p, H)$.

Beweis

- a) Das Funktional $\Psi: L_{C_z}^2(K_p, H) \longrightarrow \mathbb{C}$; $G \longmapsto \langle I_H, G J^* F \rangle_{C_x}$; ist linear und stetig:
Nach Satz 7.3 kann $G \in L_{C_z}^2(K_p, H)$ als Element von

$L_{C_{\tilde{\omega}}}^2(K_p, H)$ aufgefaßt werden und (7.7) liefert $\|GJ^*F\|_{C_x} = \|G\|_{C_{\tilde{\omega}}} \cdot (7.11)$ ergibt dann weiterhin $\|G\|_{C_{\tilde{\omega}}} \leq \|G\|_{C_z}$ und somit

$$|\Psi(G)| \leq \|I_H\|_{C_x} \|GJ^*F\|_{C_x} \leq \|X\|_{HS} \|G\|_{C_z},$$

zusammen mit der offensichtlichen Linearität also die Behauptung.

- b) Zu dem stetigen linearen Funktional Ψ auf dem Hilbertraum $L_{C_z}^2(K_p, H)$ gibt es genau ein $G_0 \in L_{C_z}^2(K_p, H)$ mit $\Psi(G) = \langle G, G_0 \rangle_{C_z}$ und dieses G_0 ist die eindeutig bestimmte Minimalstelle des quadratischen Funktionals

$$\tilde{D}(F, G) = \|G\|_{C_z}^2 - 2\operatorname{Re} \langle G, G_0 \rangle_{C_z}.$$

Die explizite Berechnung des optimalen Empfangsfilters in Form einer operatorwertigen Abbildung $\lambda \mapsto G(\lambda)$ nehmen wir unter der folgenden Voraussetzung vor, die sich später bei der Bestimmung des optimalen Sendefilters als notwendig erweisen wird:

Voraussetzung 2 Die Spektralmaße C_x und C_N der Folgen (X_k) und (N_k) mögen Spektraldichten S_x und S_N bezüglich des gleichen σ -additiven endlichen Maßes τ auf I besitzen. Für τ -fast alle $\lambda \in I$ sei $S_N(\lambda) = J^*S(\lambda)J$, wobei $S(\lambda): D_S(\lambda) \rightarrow K_0$ ein selbstadjungierter Operator auf dem in K_0 dicht liegenden linearen Teilraum $D_S(\lambda)$ ist und durch eine - von λ unabhängige - positive reelle Zahl α nach unten halbbeschränkt ist:

$$(3) \quad (S(\lambda)\varphi, \varphi)_0 \geq \alpha(\varphi, \varphi)_0 \quad \varphi \in D_S(\lambda)$$

Daß diese Voraussetzung über C_N in praktisch relevanten

Fällen erfüllt ist, zeigt das

Beispiel 3 Die Folge (N_k) sei, wie in § 2 ausgeführt, aus dem verallgemeinerten stochastischen Prozeß $\Phi: D \rightarrow L^2$ zweiter Ordnung konstruiert. Zu einem solchen Φ gibt es - vgl. Gelfand-Vilenkin [4] - ein Maß σ schwachen Wachstums auf $\mathcal{R}$, so daß für alle Testfunktionen $\varphi, \psi \in D$ mit den Fouriertransformierten $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\psi}$

$$\langle \Phi(\varphi), \Phi(\psi) \rangle = \int_{\mathcal{R}} \tilde{\varphi}(\lambda) \overline{\tilde{\psi}(\lambda)} \sigma(d\lambda)$$

Wenn nun σ eine Dichte $s(\lambda) \geq \alpha$ bezüglich des Lebesgueschen Maßes besitzt ($s(\lambda) = 1$ etwa bei "weißem Rauschen"), so rechnet man leicht aus, daß für die in § 2 auf dem nuklearen Raum K der $\varphi \in D$ mit Träger in $(0, T)$ definierten Operatoren N_k gilt

$$\langle N_0 \varphi, N_k \psi \rangle = \int_0^1 e^{-j2\pi\lambda k} B_\lambda(\varphi, \psi) d\lambda,$$

wobei für fast alle λ das Funktional

$$B_\lambda(\varphi, \psi) = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} s\left(\frac{\lambda+n}{T}\right) \tilde{\varphi}\left(\frac{\lambda+n}{T}\right) \overline{\tilde{\psi}\left(\frac{\lambda+n}{T}\right)}$$

sesquilinear, stetig und von der Form $B_\lambda(\varphi, \psi) = (S(\lambda)\varphi, \psi)_0$ mit dem symmetrischen, durch α nach unten halbbeschränkten Operator

$$S(\lambda)\varphi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s\left(\frac{\lambda+n}{T}\right) (\varphi, e_n^{(\lambda)})_0 e_n^{(\lambda)}$$

und $e_n^{(\lambda)}(t) = e^{j2\pi(\lambda+n)\frac{t}{T}} \frac{1}{\sqrt{T}}$ ist. Unter diesen Voraussetzungen gilt das

Lemma Das Spektralmaß C der stationären Folge $(N_k J)_{k \in \mathbb{Z}}$ von HS-Operatoren $N_k J: K_p \rightarrow L^2$ besitzt eine Dichte

$S_N(\lambda) = J^* S(\lambda) J$ bezüglich des Lebesgueschen Maßes auf

$I = [0, 1]$.

Beweis

Sei T_N der unitäre Operator mit $N_{k+1} = T_N N_k$ und E dessen Zerlegung der Einheit. Dann gilt für Polynome p

$$\langle p(T_N)N_0\varphi, p(T_N)N_0\psi \rangle = \int_0^1 |p(e^{-j2\pi\lambda})|^2 (S(\lambda)\varphi, \psi)_0 d\lambda$$

und durch Grenzübergang mit einer punktweise konvergenten monoton fallenden Folge von Polynomen für beliebiges $\Delta \in \mathcal{L}$:

$$\langle E(\Delta)N_0\varphi, E(\Delta)N_0\psi \rangle = \int_{\Delta} (S(\lambda)\varphi, \psi)_0 d\lambda$$

für alle $\varphi, \psi \in K$. Fortsetzung auf K_p ergibt für alle $f, g \in K_p$

$$\begin{aligned} (C(\Delta)f, g)_p &= \langle E(\Delta)N_0Jf, E(\Delta)N_0Jg \rangle = \int_{\Delta} (S(\lambda)Jf, Jg)_0 d\lambda = \\ &= \int_{\Delta} (J^*S(\lambda)Jf, g)_p d\lambda \end{aligned}$$

und nach Lemma 6.1 die Behauptung.

Da jeder halbbeschränkte symmetrische Operator eine selbstadjungierte Erweiterung besitzt (Dunford, Schwartz [3], Ch. XII), ist damit Voraussetzung 2 für die Folge $(N_k J)$ gegeben.

Unter der Voraussetzung 2 erhält man für das Funktional (2) den Ausdruck

$$(4) \quad \tilde{D}(F, G) = \int_{\mathcal{T}} \{ \|G(\lambda)S_z^{\prime/2}(\lambda)\|_{HS}^2 - 2\operatorname{Re} \langle S_x^{\prime/2}(\lambda), G(\lambda)J^*F(\lambda) \rangle \} \tau(d\lambda)$$

mit $S_z(\lambda) = S_N(\lambda) + J^*[F(\lambda)S_x^{\prime/2}(\lambda)][F(\lambda)S_x^{\prime/2}(\lambda)]^*J$,
 $F(\cdot) \in \mathcal{L}^2(\tau, S_x, H, K_0)$ und $G(\cdot) \in \mathcal{L}^2(\tau, S_z, K_p, H)$ so, daß
 $G(\cdot)J^*F(\cdot) \in \mathcal{L}^2(\tau, S_x, H, H)$.

Wir bestimmen zunächst das Minimum $G_0(\lambda)$ des Integranden

in (4) bei festem $\lambda \in I$ und lassen dabei in den folgenden Ausführungen das Argument λ inklusive der Klammern der einfacheren Schreibweise wegen weg. Also:

$S_x^{\lambda/2} = S_x^{\lambda/2}(\lambda)$, $F = F(\lambda)$, $S = S(\lambda)$ usw. Zu minimieren ist das Funktional

$$(5) \quad \Psi_0(G) := \|GS_z^{\lambda/2}\|_{HS}^2 - 2\operatorname{Re}\langle S_x^{\lambda/2}, GJ^*FS_x^{\lambda/2} \rangle_{HS}$$

auf der Menge $\mathcal{G}$ der $G \in L(K_p, H)$, deren Definitionsbereich die Bildmengen von $S_z^{\lambda/2}$ und $J^*FS_x^{\lambda/2}$ umfaßt und für die $GS_z^{\lambda/2}$ ein HS-Operator ist.

Sei $S_0 := S + (FS_x^{\lambda/2})(FS_x^{\lambda/2})^*$. S_0 ist ein auf dem Definitionsbereich D_S von S selbstadjungierter und durch α nach unten halbbeschränkter Operator in K_0 . $(\varphi, \psi)_+ := (S_0\varphi, \psi)_0$ ist daher ein inneres Produkt auf D_S und für die Norm $\|\varphi\|_+ = \sqrt{(\varphi, \varphi)_+}$ gilt

$$(6) \quad \|\varphi\|_+ \geq \sqrt{\alpha} \|\varphi\|_0 \quad \varphi \in D_S$$

Diese Norm und das innere Produkt lassen sich in eindeutiger Weise auf die Menge K_S der $x \in K_0$ fortsetzen, zu denen eine Folge (φ_n) aus D_S existiert, die in K_0 gegen x konvergiert und die bezüglich der Norm $\|\cdot\|_+$ eine Cauchy-Folge ist. K_S ist mit $(\cdot, \cdot)_+$ ein Hilbertraum ([3], XII.5).

Wegen $S_z = J^*S_0J$ gilt $K_p \subset D_S \subset K_S \subset K_0$.

$$(7) \quad Q: K_p \longrightarrow K_S \text{ und } P: K_S \longrightarrow K_0$$

seien die entsprechenden kanonischen Einbettungen.

Es gilt $J = PQ$.

Lemma 4 Der Operator $P: K_S \longrightarrow K_0$ ist linear und beschränkt und S_0 besitzt in K_0 die Inverse $S_0^{-1} = PP^*$.

Beweis

Ist $x \in K_S$ und (φ_n) eine Folge aus D_S , die in der Norm von K_0 gegen x konvergiert, dann konvergiert (φ_n) auch in $\|\cdot\|_+$ gegen x und umgekehrt. ([3], XII.5). Daraus folgt, daß wegen (6)

$$\|P\varphi\|_0 \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \|\varphi\|_+$$

also die Stetigkeit von P , und aus der Definition von $(\cdot, \cdot)_+$ für alle $\varphi \in K_S$ und alle $\psi \in D_S$, aufgefaßt als Element von K_S ,

$$(8) \quad (\varphi, \psi)_+ = (P\varphi, S_0 P\psi)_0$$

Ist $x \in K_0$ beliebig, so ist $\varphi = P^*x \in K_S$ definiert durch

$$(\varphi, \psi)_+ = (x, P\psi)_0 \quad \text{für alle } \psi \in K_S$$

Insbesondere für $\psi \in D_S$ erhält man daraus mit (8)

$$(P\varphi, S_0 P\psi)_0 = (x, P\psi)_0$$

und daraus per definitionem ([3], XII.1.4, XII.1.7):

$x = S_0^* P\varphi$ und da S_0 selbstadjungiert ist: $P\varphi \in D_S$ und $x = S_0^* P\varphi$.

Da $x \in K_0$ beliebig war, ist $S_0: D_S \rightarrow K_0$ surjektiv, wegen der Halbbeschränktheit durch $\alpha > 0$ injektiv, und besitzt damit eine Inverse S_0^{-1} , die wegen $S_0^{-1}x = P\varphi = PP^*x$ gleich PP^* ist.

Lemma 5 $S_Z \in NK(K_p)$ ist positiv definit und die Einbettung $Q: K_p \rightarrow K_S$ ist ein HS-Operator mit $S_Z = Q^*Q$.

Beweis

Für alle $f \in K_p$, $f \neq 0$, ist wegen $Jf \neq 0$

$$(S_Z f, f)_p = (S_0 Jf, Jf)_0 \geq \alpha \|Jf\|_0^2 > 0$$

S_Z ist damit positiv definit und besitzt eine in K_p konvergente Summendarstellung

$$(9) \quad S_Z f = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sigma_k^2(f, f_k)_p f_k \quad f \in K_p$$

mit einem vollständigen Orthonormalsystem (f_k) von K_p und einer quadratisch summierbaren Folge (σ_k) positiver reeller Zahlen.

Die $\varphi_k := \frac{1}{\sigma_k} Q f_k$ liegen insbesondere in D_S und bilden ein Orthonormalsystem in K_S , denn nach (8) und wegen $J = PQ$

$$\begin{aligned} (\varphi_k, \varphi_l)_+ &= (P \varphi_k, S_0 P \varphi_l)_0 = \frac{1}{\sigma_k \sigma_l} (J f_k, S_0 J f_l)_0 = \\ &= \frac{1}{\sigma_k \sigma_l} (f_k, S_Z f_l)_p = \delta_{kl} \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort, daß $Q \in HS(K_p, K_S)$ mit $\|Q\|_{HS}^2 = \sum_k \sigma_k^2$ und die in K_S konvergente Summendarstellung

$$Qf = \sum_k \sigma_k (f, f_k)_p \varphi_k \quad f \in K_p,$$

sowie die des adjungierten Operators Q^* in K_p :

$$(10) \quad Q^* = \sum_k \sigma_k (\varphi, \varphi_k)_+ f_k,$$

was $S_Z = Q^* Q$ ergibt.

Definition 6 $(Q^*)^-$ sei die verallgemeinerte Inverse von Q^* , d.h. ([6], Definition 2.11) die Abbildung, die jedem Element aus dem Wertebereich von Q^* das Urbild zuordnet, welches orthogonal zum Nullraum von Q^* ist.

Lemma 7 $(Q^*)^-$ ist auf dem Bild von $S_Z^{1/2}$ wohldefiniert, $U := (Q^*)^- S_Z^{1/2} : K_p \longrightarrow K_S$ isometrisch und für alle G aus $L(K_p, H)$ mit $GS_Z^{1/2} \in HS(K_p, H)$ gilt: GJ^* ist stetig und gleich

der linearen Abbildung $(GS_Z^{\frac{1}{2}})U^*P^*$.

Beweis

a) Aus (9) erhält man für $S_Z^{\frac{1}{2}}$ die Darstellung

$$(11) \quad S_Z^{\frac{1}{2}} f = \sum_k \sigma_k(f, f_k)_p f_k \quad f \in K_p$$

und aus dem Vergleich mit (10) ergibt sich, daß Q^* und $S_Z^{\frac{1}{2}}$ den gleichen Wertebereich besitzen, nämlich die Menge der in K_p konvergenten Summen

$$(12) \quad f = \sum_k \alpha_k f_k \quad \alpha_k \in \mathbb{C}, \quad \sum_k |\alpha_k|^2 < \infty$$

$(Q^*)^{-1}$ ordnet jedem solchen f das Element

$$(Q^*)^{-1} f = \sum_k \alpha_k \varphi_k$$

aus K_S zu und daraus ergibt sich $U f_k = \varphi_k$, $k \in \mathbb{N}$, d.h. die Isometrie von U .

b) Jedes f der Form (12) liegt im Definitionsbereich von G und da $GS_Z^{\frac{1}{2}}$ stetig ist, erhält man daraus

$$(13) \quad Gf = \sum_k \sigma_k \alpha_k Gf_k$$

Q ist nach Lemma 5 ein HS-Operator, also auch $J = PQ$ und J^* . Wie man sich leicht überzeugt, ist für $x \in K_0$ J^*x gegeben durch die in K_p konvergente Summe

$$J^*x = \sum_k \sigma_k(x, P\varphi_k)_0 f_k$$

mit $\varphi_k = \frac{1}{\sigma_k} Qf_k$, die wegen

$$\sum_k |(x, P\varphi_k)_0|^2 = \sum_k |(P^*x, \varphi_k)_+|^2 \leq \|P^*x\|_+^2 < \infty$$

von der Form (12) und damit im Definitionsbereich von G ist. (13) ergibt dann

$$GJ^*x = \sum_k G_k(x, P_k)_0 Gf_k$$

und

$$(x, P_k)_0 = (P^*x, f_k)_+ = (P^*x, Uf_k)_+ = (U^*P^*x, f_k)_p$$

die Identität

$$GJ^*x = (GS_Z^{\prime\prime/2})U^*P^*x$$

für beliebige $x \in K_0$ und damit die Behauptung.

Satz 8 $G_0 := S_X^{\prime\prime/2} (FS_X^{\prime\prime/2})^* P(Q^*)^{-}$ liegt im Definitionsbereich $\mathcal{G}$ des Funktional Ψ_0 aus (5) und für alle $G \in \mathcal{G}$ ist

$$\Psi_0(G_0) \leq \Psi_0(G).$$

Beweis

$Y := S_X^{\prime\prime/2} (FS_X^{\prime\prime/2})^*$ ist ein HS-Operator und nach Lemma 7 ist $(Q^*)^{-} S_Z^{\prime\prime/2} = U$ beschränkt. Daher ist $G_0 S_Z^{\prime\prime/2} = YPU \in HS(K_p, H)$.

Weiter nach Lemma 7 ist $G_0 J^*$ beschränkt und daher

$G_0 J^* (FS_X^{\prime\prime/2}) \in HS(H, H)$, so daß G_0 in $\mathcal{G}$ liegt.

Wie man mit Hilfe der Rechenregeln aus Lemma 2.1 und der Identität $G_1 J^* = (G_1 S_Z^{\prime\prime/2}) U^* P^*$ leicht ausrechnet, gilt für $G_1 \in \mathcal{G}$

$$(14) \quad \langle G_1 S_Z^{\prime\prime/2}, G_0 S_Z^{\prime\prime/2} \rangle_{HS} = \langle G_1 J^* (FS_X^{\prime\prime/2}), S_X^{\prime\prime/2} \rangle_{HS}$$

Sei G ein weiteres Element aus $\mathcal{G}$ und $G_1 = G - G_0$. Dann ist nach (14)

$$\begin{aligned} \Psi_0(G) - \Psi_0(G_0) &= \langle G_1 S_Z^{\prime\prime/2}, G_1 S_Z^{\prime\prime/2} \rangle_{HS} + \\ &+ 2\operatorname{Re} \left\{ \langle G_1 S_Z^{\prime\prime/2}, G_0 S_Z^{\prime\prime/2} \rangle_{HS} - \langle G_1 J^* (FS_X^{\prime\prime/2}), S_X^{\prime\prime/2} \rangle_{HS} \right\} = \\ &= \|G_1 S_Z^{\prime\prime/2}\|_{HS}^2 \geq 0 \end{aligned}$$

und damit der Satz bewiesen.

Korollar 9 G_0 wie in Satz 8. Dann ist

$$\Upsilon_0(G_0) = - \|S_0^{-1/2} (FS_X^{1/2}) S_X^{1/2}\|_{HS}^2, \quad ,$$

wobei $S_0^{-1/2}$ die Quadratwurzel des Operators S_0^{-1} ist.

Beweis

(14) angewandt auf $G_1 := G_0$ liefert

$$(15) \quad \Upsilon_0(G_0) = - \langle G_0 J^* (FS_X^{1/2}), S_X^{1/2} \rangle_{HS} = - \|G_0 S_Z^{1/2}\|_{HS}^2$$

und $G_0 J^* = YP(Q^*)^{-1} Q^* P^* = YPP^* = S_X^{1/2} (FS_X^{1/2})^* S_0^{-1}$ nach Lemma 3.

Die üblichen Rechenregeln aus Lemma 2.1 ergeben daraus die Behauptung.

Damit sind wir in der Lage, das Minimum des Funktionals $\tilde{D}(F, G)$ bei festem F explizit anzugeben:

Satz 10 Es gelte Voraussetzung 2. Dann ist das Minimum $G_0 \in L_{C_Z}^2(K_P, H)$ bei festem $F \in L_{C_X}^2(H, K_0)$ gegeben durch die operatorwertige Abbildung

$$\lambda \longmapsto G_0(\lambda) := S_X^{1/2}(\lambda) [F(\lambda) S_X^{1/2}(\lambda)]^* P(\lambda) (Q^*(\lambda))^{-1}$$

als Repräsentant von G_0 in $\mathcal{L}^2(\tau, S_Z, K_P, H)$. Dabei sind $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$ die durch (7) definierten Einbettungen, wenn

$$S_0 = S_0(\lambda) = S(\lambda) + [F(\lambda) S_X^{1/2}(\lambda)] [F(\lambda) S_X^{1/2}(\lambda)]^* \text{ ist.}$$

Beweis

Nach Satz 8 wird durch $G_0(\lambda)$ der Integrand des Funktionals $\tilde{D}$ in (4) punktweise minimiert und es sind $G_0(\lambda) S_Z^{1/2}(\lambda)$ und $G_0(\lambda) J^* (F(\lambda) S_X^{1/2}(\lambda))$ HS-Operatoren. Zu zeigen ist also nur noch, daß $G_0(\cdot) S_Z^{1/2}(\cdot) \in \mathcal{L}^2(\tau, HS(K_P, H))$.

- a) Meßbarkeit: Da die Hilberträume K_p und H separabel sind, ist auch $HS(K_p, H)$ separabel und es ist nur noch nachzuweisen, daß für alle $f \in K_p$ und alle $x \in H$ die Funktionen

$$(16) \quad \lambda \mapsto (G_o(\lambda) S_z^{\prime\prime 2}(\lambda) f, x)$$

im gewöhnlichen Sinne meßbar sind (Dinculeanu [2]). Nach Satz 8 ist $G_o(\lambda) S_z^{\prime\prime 2}(\lambda) = Y(\lambda) P(\lambda) U(\lambda)$, wobei $Y(\lambda) = S_x^{\prime\prime 2}(\lambda) (F(\lambda) S_x^{\prime\prime 2}(\lambda))^*$ nach Voraussetzung als Abbildung in $HS(K_o, H)$ stark meßbar ist. Nach Definition von $P(\lambda)$ und $U(\lambda)$ ist

$$\tilde{f}(\lambda) := U(\lambda) P(\lambda) f = \sum_n \frac{1}{|\tilde{\sigma}_n(\lambda)|} J P_n(\lambda) f, \quad ,$$

wobei $\tilde{\sigma}_n^2(\lambda)$ die paarweise verschiedenen und nach Lemma 5 τ -fast überall positiven Eigenwerte von $S_z(\lambda)$ und $P_n(\lambda)$ die Projektionen auf die entsprechenden Eigenräume sind. Aus [6], Theorem 2.10 folgt, daß $\lambda \mapsto \tilde{f}(\lambda)$ als Abbildung in K_o stark meßbar und die Funktionen (16) somit meßbar sind.

- b) Integrierbarkeit von $\|G_o(\cdot) S_z^{\prime\prime 2}(\cdot)\|_{HS}^2$:
Aus Gleichung (7.11) erhalten wir

$$\|G_o(\lambda) S_z^{\prime\prime 2}(\lambda)\|_{HS}^2 \geq \|G_o(\lambda) J^* F(\lambda) S_x^{\prime\prime 2}(\lambda)\|_{HS}^2.$$

Sei $\Psi_\lambda(G_o(\lambda))$ der Integrand in der Integraldarstellung (4) des Funktional $\tilde{D}$. Dann erhalten wir aus (15) in Korollar 9 für τ -fast alle λ :

$$\begin{aligned} \|S_x^{\prime\prime 2}(\lambda)\|_{HS}^2 - \|G_o(\lambda) S_z^{\prime\prime 2}(\lambda)\|_{HS}^2 &= \|S_x^{\prime\prime 2}(\lambda)\|_{HS}^2 + \Psi_\lambda(G_o(\lambda)) \geq \\ &\geq \|S_x^{\prime\prime 2}(\lambda)\|_{HS}^2 - 2\operatorname{Re} \langle G_o(\lambda) J^* F(\lambda) S_x^{\prime\prime 2}(\lambda), S_x^{\prime\prime 2}(\lambda) \rangle_{HS} + \\ &+ \|G_o(\lambda) J^* F(\lambda) S_x^{\prime\prime 2}(\lambda)\|_{HS}^2 = \|G_o(\lambda) J^* F(\lambda) S_x^{\prime\prime 2}(\lambda) - S_x^{\prime\prime 2}(\lambda)\|_{HS}^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{oder } \|G_o(\lambda)S_z^{-1/2}(\lambda)\|_{HS}^2 \leq \|S_x^{-1/2}(\lambda)\|_{HS}^2$$

und nach Satz 6.3 die Integrierbarkeit.

Bemerkung Aus Korollar 9 ergibt sich, daß der Übertragungsfehler

$$\tilde{D}(F, G_o) = - \int_I \|S_o^{-1/2}(\lambda)F(\lambda)S_x(\lambda)\|_{HS}^2 \tau(d\lambda)$$

unter Voraussetzung 2 unabhängig von der speziellen Wahl des Raumes K_D ist, auf den die auf dem nuklearen Raum K definierten Operatoren N_k in § 3 fortgesetzt werden. Der Fehler hängt nur von der Abbildung $\lambda \mapsto S(\lambda)$ ab.

Teil III

Das Optimierungsproblem in Spektral-
darstellung

§ 9 Die Optimierungsaufgabe

Das Sendesignal (X_k) und das Störsignal (N_k) erfülle wieder die Voraussetzung 8.2. Nach Einsetzen des optimalen Empfangsfilters $G_o = G_o(F)$ zu gegebenem $F \in L_{C_x}^2(H, K_o)$ hängt das Funktional $\tilde{D}$ aus (4) nur noch von F ab und nach Korollar 8.9 ist

$$(1) \quad \tilde{D}(F, G_o(F)) = - \int_I \|S_o^{-1/2}(\lambda) [F(\lambda) S_x^{1/2}(\lambda)] S_x^{1/2}(\lambda)\|_{HS}^2 \tau(d\lambda)$$

Das Funktional $\tilde{D}_o: L_{C_x}^2(H, K_o) \longrightarrow \mathbb{R}_+$, definiert durch

$$(2) \quad \tilde{D}_o(F) = - \tilde{D}(F, G_o(F))$$

stellt ein Maß für die Güte des Übertragungssystems bei gegebenem Sendefilter F dar. Dieses Gütemaß wollen wir auf den wie folgt definierten Teilmengen von Sendefiltern optimieren:

Definition 1 Es sei p eine natürliche Zahl, $\beta_1, \dots, \beta_p$ positive reelle Zahlen und $P_q: H \longrightarrow H$; $1 \leq q \leq p$; Projektionsoperatoren auf paarweise orthogonale Unterräume von H , deren Summe gleich dem Einheitsoperator I_H von H ist. Dann sei

$$\mathcal{F}(P_1, \dots, P_p; \beta_1, \dots, \beta_p)$$

die Menge der $F \in L_{C_x}^2(H, K_o)$, die den Ungleichungen

$$\|FP_q\|_{C_x}^2 \leq \beta_q \quad 1 \leq q \leq p$$

genügen. FP_q ist dabei das durch $\lambda \mapsto F(\lambda)P_q$ repräsentierte Element von $L_{C_x}^2(H, K_o)$. Im Falle $p = 1$, d.h. $P_1 = I_H$,

sei $\mathcal{F}(I_H; \mathcal{B}_1) =: \mathcal{F}_{\mathcal{B}_1}$ abgekürzt und globale Beschränkung durch $\mathcal{B}_1$ genannt.

Die in § 1 beschriebene globale und Einzelleistungsbeschränkung ist in Definition 1 als Spezialfall enthalten. Ist nämlich $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ die Operatordarstellung eines stationären Vektorprozesses $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit Werten in $\mathcal{C}^N$,

$$(3) \quad x_k = \begin{pmatrix} j_k^{(1)} \\ \vdots \\ j_k^{(N)} \end{pmatrix}$$

sowie $w_m(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} j_k^{(m)} g_m(t-kT)$ und $w(t) = \sum_{m=1}^M w_m(t)$ das Sendesignal gemäß § 1, so gilt für den durch

$$W\varphi := \int_0^T \varphi(t) \overline{w(t)} dt$$

gegebenen HS-Operator auf K_0 mit Werten in L^2 :

$$\|W\|_{HS}^2 = \int_0^T \mathcal{E}|w(t)|^2 dt,$$

wie man leicht nachrechnet, und nach Lemma 3.4 $W = \int F dE_x$ mit $F(\lambda) = \sum_{k \in \mathcal{K}} e^{j2\pi\lambda k} A_k^*$ mit einer endlichen Indexmenge $\mathcal{K} \subset \mathbb{Z}$ und $A_k \in B(K_0, \mathcal{C}^N)$. Satz 7.1 liefert daraus

$$\int_0^T \mathcal{E}|w(t)|^2 dt = \|F\|_{C_x}^2,$$

die globale Leistungsbeschränkung entspricht der Menge $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$.

Sind $\tilde{P}_m: \mathcal{C}^N \longrightarrow \mathcal{C}^N$; $1 \leq m \leq M$; die Projektionen auf die von den Einheitsvektoren des $\mathcal{C}^N$ aufgespannten Teilräume, so rechnet man ebenso leicht nach, daß

$$\int_0^T |w_m(t)|^2 dt = \|F\tilde{P}_m\|_{C_x}^2$$

mit dem durch $W = \int F dE_x$ bestimmten F , so daß die Einzelleistungsbeschränkung der Menge $\mathcal{F}(P_1, \dots, P_M; \beta_1, \dots, \beta_M)$ entspricht.

An dieser Stelle sei gleich noch die Bedeutung einer Voraussetzung erläutert, die weiter unten gefordert wird:

Ist $P_1: \mathcal{C}^M \longrightarrow \mathcal{C}^M$ eine Projektion auf den von Einheitsvektoren $e_m; m \in \mathcal{K}_1$; des $\mathcal{C}^M$ aufgespannten Teilraums und

$\mathcal{K}_2 := \{n; 1 \leq n \leq M, n \notin \mathcal{K}_1\}$, so gilt: P_1 ist mit $S_x^{A/2}(\lambda)$ für τ -fast alle $\lambda \in I$ vertauschbar, genau dann, wenn für alle $k, l \in \mathbb{Z}$ und alle $m \in \mathcal{K}_1, n \in \mathcal{K}_2$ gilt: die Zufallsgrößen $J_k^{(m)}$ und $J_l^{(n)}$ (aus (3)) sind unkorreliert.

Beweis

Es sei $P_2 = I_{\mathcal{C}^M} - P_1$. Die Unkorreliertheit der Zufallsgrößen bedeutet für die Operatoren $X_k = T_x^k X$ nichts anderes als

$$\langle X_k P_1 z_1, X_0 P_2 z_2 \rangle = 0$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle $z_1, z_2 \in \mathcal{C}^M$, oder

$$(4) \quad P_2 X^* T_x^k X P_1 = 0$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt (4) aber auch für alle $E(\Delta)$ anstelle von T_x^k , wenn E die Zerlegung der Einheit von T_x ist. Wegen $C_x(\Delta) = X^* E(\Delta) X$ gilt daher für das Spektralmaß von (X_k)

$$P_1 C_x(\Delta) = P_1 C_x(\Delta) P_1 + P_1 C_x(\Delta) P_2 = P_1 C_x(\Delta) P_1$$

und

$$C_x(\Delta) P_1 = P_1 C_x(\Delta) P_1 + P_2 C_x(\Delta) P_1 = P_1 C_x(\Delta) P_1$$

Die Vertauschbarkeit von P_1 mit $C_x(\Delta)$ für alle $\Delta \in \mathcal{B}$ ist äquivalent zu der von P_1 mit $S_x(\lambda)$ für τ -fast alle λ und

das wiederum zu der von P_1 mit $S_x^{1/2}(\lambda)$.

Zur Bestimmung des Maximums des Funktional $\tilde{D}_0$ auf den Mengen $\mathcal{F}(P_1, \dots, P_p; \beta_1, \dots, \beta_p)$ gehen wir wie folgt vor:
Zunächst wird das Maximum $F_0(\lambda)$ des Integranden von $\tilde{D}_0$ bei festem, aber beliebigem $\lambda \in I$ unter Definition 1 entsprechenden Nebenbedingungen

$$\|F_\lambda P_q S_x^{1/2}(\lambda)\|_{HS}^2 \leq \beta_q(\lambda) \quad 1 \leq q \leq p$$

bestimmt. Diese Aufgabe wird im folgenden als "das diskrete Optimierungsproblem" bezeichnet.

Wie sich zeigen wird, ist bei integrierbaren $\lambda \mapsto \beta_q(\lambda)$ die Abbildung $\lambda \mapsto F_0(\lambda)$ ein Element von $\mathcal{L}^2(\tau, S_x, H, K_0)$.

Im zweiten Schritt wird dann $\tilde{D}_0(F_0)$ in Abhängigkeit von den Beschränkungsfunktionen $\beta_q(\cdot)$ maximiert, was wir "das skalare Optimierungsproblem" nennen werden.

§ 10 Das diskrete Optimierungsproblem unter globaler Beschränkung. Notwendige Bedingungen für ein Maximum.

Die Voraussetzung 8.2 sei erfüllt und ein $\lambda \in I$ fest vorgegeben. Wie in § 8 lassen wir bei allen Abbildungen wieder das Argument λ samt Klammern der einfacheren Schreibweise wegen wegfällen. Es ist also $S_x = S_x(\lambda)$, $F = F(\lambda)$ usw. in diesem Abschnitt.

S_x besitzt nach Lemma 2.2 eine Darstellung

$$(1) \quad S_x y = \sum_{k \in \mathcal{K}} \sigma_k(y, x_k) x_k \quad y \in H, \quad ,$$

wobei die σ_k die positiven Eigenwerte und die x_k die entsprechenden orthonormierten Eigenelemente von S_x sind. Die Folge (σ_k) ist summierbar. H_0 sei der von den x_k aufgespannte abgeschlossene Unterraum von H . Die Indexmenge $\mathcal{K}$ sei entweder gleich $\{1, 2, \dots, h_0\}$ bei endlicher Dimension h_0 von H_0 oder gleich $\mathbb{N}$.

Der Integrand in der Darstellung (8.1) des Funktional $\tilde{D}_0$ ist an der Stelle λ von der Form

$$(2) \quad \|S_0^{-1/2} (FS_x^{1/2}) S_x^{1/2}\|_{HS}^2$$

mit $S_0 := S + (FS_x^{1/2})(FS_x^{1/2})^*$, S ein selbstadjungierter und durch $\alpha > 0$ nach unten halbbeschränkter Operator in K_0 , $F \in L(H, K_0)$ eine lineare Abbildung, die mindestens auf dem Wertebereich von $S_x^{1/2}$ definiert ist mit $FS_x^{1/2} \in HS(H, K_0)$. Die Größe (2) soll für eine beliebige, aber feste positive reelle Zahl β unter der Nebenbedingung

$$(3) \quad \|FS_x^{1/2}\|_{HS}^2 \leq \beta$$

maximiert werden. Da es belanglos ist, wie F außerhalb des Wertebereichs von $S_x^{1/2}$ definiert ist, können wir anstelle von $FS_x^{1/2}$ alle HS-Operatoren $G: H \rightarrow K_0$ mit $\|G\|_{HS}^2 \leq B$ betrachten und ein geeignetes F aus der Rücktransformation $F = G(S_x^{1/2})^{-1}$ mit der verallgemeinerten Inversen gewinnen. Da außerdem H_0 das orthogonale Komplement des Nullraums von $S_x^{1/2}$ ist, kann man o.E. $S_x^{1/2}$ und G als nur auf H_0 definiert ansehen, H_0 als Hilbertraum mit dem inneren Produkt $(\cdot, \cdot)_0$ von H versehen. Man erhält ein Maximum von (2) unter der Nebenbedingung (3) daher aus der Lösung des folgenden

Optimierungsproblem 1

Gesucht ist ein Maximum des Funktional $\mathcal{D}: HS(H_0, K_0) \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$(4) \quad \mathcal{D}(G) := \|(S + GG^*)^{-1/2} GS_x^{1/2}\|_{HS}^2$$

auf der Menge

$$(5) \quad \mathcal{G}_B := \{G \in HS(H_0, K_0) ; \|G\|_{HS}^2 \leq B\}$$

K_0 kann man in diesem Paragraphen losgelöst vom Zusammenhang mit dem nuklearen Raum K als beliebigen separablen Hilbertraum mit innerem Produkt $(\cdot, \cdot)_0$ und Norm $\|\cdot\|_0$ ansehen.

Eigenschaften des Funktional $\mathcal{D}$

Lemma 2 Für $G \in HS(H_0, K_0)$ sei $M_G := (S + GG^*)^{-1}$. Außerdem seien $U: H_0 \rightarrow H_0$ und $V: K_0 \rightarrow K_0$ unitäre, mit S_x bzw. S vertauschbare Operatoren. Dann gilt:

- a) $M_G: K_0 \rightarrow K_0$ ist selbstadjungiert, positiv definit und in der Norm $\|\cdot\|$ des Raums $B(K_0)$ durch $1/2$ beschränkt.
- b) $\mathcal{D}(G) = \langle GS_x^{1/2}, M_G G \rangle_{HS}$ und
- c) $\mathcal{D}(VGU) = \mathcal{D}(G)$.

Beweis

a) ist Inhalt des Lemma 8.4 und b) und c) folgen aus den Regeln für das innere Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{HS}}$ in Lemma 2.1.

Lemma 3 $\mathcal{D}$ besitzt in jedem Punkt $G \in \text{HS}(H_0, K_0)$ die Fréchet-Ableitung

$$\delta \mathcal{D}(G; \Delta) := 2 \operatorname{Re} \langle \Delta, M_G G S_x - M_G G S_x^* M_G G \rangle_{\text{HS}} ,$$

$\Delta \in \text{HS}(H_0, K_0)$, M_G wie in Lemma 2.

Beweis

Wir zeigen, daß es eine Konstante $\gamma > 0$ und eine ε -Umgebung des Nullpunkts von $\text{HS}(H_0, K_0)$ gibt, so daß für alle Δ aus dieser Umgebung und der oben definierten Größe $\delta \mathcal{D}(G; \Delta)$ gilt:

$$| \mathcal{D}(G+\Delta) - \mathcal{D}(G) - \delta \mathcal{D}(G; \Delta) | \leq \gamma \|\Delta\|_{\text{HS}}^2 .$$

a) Für alle $G, \Delta \in \text{HS}(H_0, K_0)$ ist nach Lemma 2

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(G+\Delta) - \mathcal{D}(G) &= \langle G S_x, (M_{G+\Delta} - M_G) G \rangle_{\text{HS}} + \langle S_x, M_{G+\Delta} G \rangle_{\text{HS}} \\ &\quad + \langle G S_x, M_{G+\Delta} \Delta \rangle_{\text{HS}} + \langle \Delta S_x, M_{G+\Delta} \Delta \rangle_{\text{HS}} \end{aligned}$$

und

$$| \langle \Delta S_x, M_{G+\Delta} \Delta \rangle_{\text{HS}} | \leq \frac{1}{2} \|S_x\| \cdot \|\Delta\|_{\text{HS}}^2$$

b) Außerdem ist

$$M_{G+\Delta} = [(I_{K_0} + A_1(\Delta) M_G) (S + G G^*)]^{-1}$$

$$\text{mit } A_1(\Delta) = G \Delta^* + \Delta G^* + \Delta \Delta^* .$$

Ist $0 < \kappa < 1$ vorgegeben, so gibt es dazu ein $\varepsilon > 0$ so,

daß für alle Δ mit $\|\Delta\|_{HS} \leq \varepsilon$ gilt

$$(6) \quad \|A_1(\Delta)M_G\| \leq \kappa$$

Für diese Δ ist $I_{K_0} + A_1(\Delta)M_G$ invertierbar und die Inverse in eine in $B(K_0)$ konvergente von Neumannsche Reihe entwickelbar. Daraus folgt

$$(7) \quad (I_{K_0} + A_1(\Delta))^{-1} = I_{K_0} - A_1(\Delta)M_G + A_2(\Delta) \quad ,$$

$A_2(\Delta) = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k (A_1(\Delta)M_G)^k$ läßt sich wegen (6) in der Norm abschätzen durch

$$\|A_2(\Delta)\| \leq \|A_1(\Delta)\|^2 \frac{1}{\alpha^2(1-\kappa)} \leq \frac{(2\|G\|_{HS} + \varepsilon)^2}{\alpha^2(1-\kappa)} \|\Delta\|_{HS}^2$$

(7) ergibt

$$M_{G+\Delta} = M_G - M_G(G\Delta^* + \Delta G^*)M_G + A_2(\Delta) \quad ,$$

$$\|A_2(\Delta)\| \leq \|M_G\|^2 \|\Delta\|_{HS}^2 + \|M_G\| \|A_2(\Delta)\| \leq \gamma_1 \|\Delta\|_{HS}^2$$

c) Mit diesen Abschätzungen erhält man ein $\gamma > 0$, so daß

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}(G+\Delta) - \mathcal{D}(G) - [\langle \Delta S_x, M_G G \rangle_{HS} + \langle G S_x, M_G \Delta \rangle_{HS} - \\ - \langle G S_x, M_G (G\Delta^* + \Delta G^*) M_G G \rangle_{HS}]| \leq \gamma \|\Delta\|_{HS}^2 \end{aligned}$$

für $\|\Delta\|_{HS} \leq \varepsilon$ und mit Lemma 2.1 rechnet man leicht aus, daß der in eckigen Klammern stehende Ausdruck gleich dem oben definierten $\delta \mathcal{D}(G; \Delta)$ ist.

Notwendige Bedingungen für ein Maximum bei globaler Beschränkung

Lemma 4 Es sei $\beta > 0$, $\mathcal{D}$ und $\mathcal{G}_\beta$ durch (4) und (5) definiert. Ist $G \in \mathcal{G}_\beta$ ein Maximum des Funktionals $\mathcal{D}$ auf $\mathcal{G}_\beta$, so

gibt es eine reelle Zahl $\kappa > 0$ mit der Eigenschaft

$$(8) \quad M_G G S_x - M_G G S_x G^* M_G G = \kappa G$$

und es ist $\|G\|_{HS}^2 = \beta$

Beweis

Die Funktion $\Psi(\hat{G}) := \|\hat{G}\|_{HS}^2$ besitzt die Fréchet-Ableitung $\delta\Psi(\hat{G};\Delta) = 2\operatorname{Re} \langle \Delta, \hat{G} \rangle_{HS}$. Die Kuhn-Tuckersche notwendige Bedingung für ein Maximum des Funktionals $\mathcal{D}$ auf der Menge $\mathcal{G}_\beta$ im Punkt G lautet daher: Es gibt eine nicht-negative reelle Zahl κ so, daß

$$\delta\mathcal{D}(G;\Delta) = \kappa \cdot \delta\Psi(G;\Delta) \quad \text{für alle } \Delta \in HS(H_0, K_0)$$

(Girsanov: Lectures on Mathematical Theory of Extremum Problems, Berlin 1972)

und aus Lemma 3 erhält man daraus (8).

Annahme, es sei $\kappa = 0$. Durch Multiplikation von (8) mit G^* von rechts folgt daraus

$$0 = M_G G S_x G^* (I_{K_0} - M_G G G^*) = M_G G S_x G^* M_G S$$

nach Definition von M_G und da M_G und S invertierbar sind, weiterhin $G S_x^{1/2} = 0$. Dies würde aber bedeuten, daß

$\mathcal{D}(G) = 0$ im Widerspruch zur Maximalität von G , denn $\mathcal{D}$ ist ein nichttriviales Funktional auf $\mathcal{G}_\beta$ bei $\beta > 0$.

Aus $\kappa > 0$ folgt dann auch (loc. cit.), daß $\|G\|_{HS}^2 = \beta$.

Satz 5 Ist G ein Maximum des Funktionals $\mathcal{D}$ auf $\mathcal{G}_\beta$, so sind die Operatoren $S^{-1}, G G^*$ und $G S_x G^*$ paarweise untereinander und S_x mit $G^* G$ vertauschbar.

Beweis

a) Wie in Lemma 4 erhält man durch Multiplikation der Gleichung (8) mit G^* von rechts die Identität

$$(9) \quad M_G G S_X G^* M_G S = \kappa G G^*$$

auf dem Definitionsbereich D_S von S und wegen $\kappa > 0$

$$(10) \quad G G^* S^{-1} = \frac{1}{\kappa} M_G G S_X G^* M_G \quad .$$

Da die rechte Seite von (10) und S^{-1} selbstadjungiert sind, ergibt (10) die Vertauschbarkeit von $G G^*$ und S^{-1} .

b) Aus (10) erhält man durch Multiplikation mit $S + G G^*$ von rechts auf D_S die Identität

$$M_G G S_X G^* = \kappa (G G^*)^2 + \kappa G G^* S^{-1} G G^* \quad ,$$

die wegen der Stetigkeit der Operatoren auf ganz K_0 gilt, woraus wie in a) folgt

$$(11) \quad M_G G S_X G^* = G S_X G^* M_G$$

c) Multiplikation der Gleichung (8) mit G^* von links ergibt

$$(12) \quad G^* M_G G S_X - G^* M_G G S_X G^* M_G = \kappa G^* G \quad , \quad \text{oder}$$

$$G^* M_G G S_X = S_X G^* M_G G$$

Durch entsprechende weitere Multiplikation

$$S_X G^* M_G G S_X G^* M_G G = G^* M_G G S_X^2 G^* M_G G \quad ,$$

woraus durch Multiplikation von (12) mit S_X von links

$$S_X G^* G = \frac{1}{\kappa} [S_X G^* M_G G S_X - G^* M_G G S_X^2 G^* M_G G]$$

oder die Vertauschbarkeit von S_X mit $G^* G$ folgt.

Daraus erhält man insbesondere

$$G S_X G^* G G^* = G G^* G S_X G^* \quad ,$$

so daß nur noch $S^{-1}GS_xG^* = GS_xG^*S^{-1}$ zu zeigen ist.

d) Aus (11) erhält man

$$M_G GS_x G^* (S + GG^*) = GS_x G^* ,$$

der Wertebereich von $GS_x G^*$ ist also im Definitionsbereich von $S + GG^*$ enthalten, so daß man mit diesem Operator von links multiplizieren kann, was

$$GS_x G^* (S + GG^*) = (S + GG^*) GS_x G^*$$

und zusammen mit c) die Vertauschbarkeit von $GS_x G^*$ und S^{-1} ergibt.

Lemma 6 Ist $\beta > 0$ und G ein Maximum von $\mathcal{D}$ auf $\mathcal{G}_\beta$, so gibt es eine Menge $\tilde{\mathcal{K}} \subset \mathbb{N}$, ein Orthonormalsystem $(f_k)_{k \in \tilde{\mathcal{K}}}$ in K_0 und positive reelle Zahlen μ_k, ν_k, τ_k ; $k \in \tilde{\mathcal{K}}$; mit den folgenden Eigenschaften:

μ_k, ν_k bzw. τ_k sind Eigenwerte der Operatoren $GG^*, GS_x G^*$ bzw. S zu den Eigenelementen f_k und es gilt

$$\sum_{k \in \tilde{\mathcal{K}}} \mu_k = \|G\|_{HS}^2 = \beta, \quad \sum_{k \in \tilde{\mathcal{K}}} \nu_k < \infty \quad \text{und} \quad \tau_k \geq \alpha > 0 \quad \text{für}$$

alle $k \in \tilde{\mathcal{K}}$.

Beweis

a) Da GG^* und $GS_x G^*$ miteinander vertauschbar und insbesondere vollständig sind, besitzen sie ein gemeinsames vollständiges Orthonormalsystem $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Eigenelementen in K_0 mit zugehörigen nichtnegativen Eigenwerten $\tilde{\mu}_k$ bzw. $\tilde{\nu}_k$ (vgl. [12]).

Sei $\tilde{\mathcal{K}}$ die Menge der $k \in \mathbb{N}$ mit $\tilde{\mu}_k + \tilde{\nu}_k > 0$ und K_1 der von den g_k mit $k \in \tilde{\mathcal{K}}$ aufgespannte Unterraum von K_0 .

Der selbstadjungierte Operator S^{-1} ist mit den beiden obigen Operatoren vertauschbar, also werden deren -

endlichdimensionale - Eigenräume zu positiven Eigenwerten durch S^{-1} reduziert und wir können daher ein vollständiges Orthonormalsystem $(f_k)_{k \in \mathcal{K}}$ von K_1 finden, so daß die f_k Eigelemente von GG^* , $GS_X G^*$ und S^{-1} zu Eigenwerten α_k , ν_k bzw. $\tilde{\nu}_k$ sind mit

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} \alpha_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} \tilde{\alpha}_k = \|G\|_{HS}^2 = \beta \text{ nach Lemma 4,}$$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} \nu_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} \tilde{\nu}_k = \|GS_X^{-1/2}\|_{HS}^2 < \infty \text{ und}$$

$$\alpha_k + \nu_k > 0 \quad \text{für alle } k \in \mathcal{K}.$$

Da S durch $\alpha > 0$ nach unten halbbeschränkt ist, gilt außerdem für die Eigenwerte $\tau_k = \tilde{\tau}_k^{-1}$ von S zu den Eigelementen f_k : $\tau_k \geq \alpha$.

- b) Zu zeigen ist also nur noch, daß alle α_k und ν_k positiv sind. Da nach Definition der f_k

$$M_G f_k = \frac{1}{\tau_k + \alpha_k} f_k,$$

liefert Gleichung (9)

$$(13) \quad \frac{\tau_k}{(\tau_k + \alpha_k)^2} \nu_k = \chi \alpha_k$$

wegen $\tau_k > 0$ und $\chi > 0$ also $\nu_k > 0$ genau dann, wenn $\alpha_k > 0$, was zusammen mit $\alpha_k + \nu_k > 0$ die Behauptung ergibt.

Satz 7 Voraussetzungen wie in Lemma 6. Dann gibt es eine natürliche Zahl $\tilde{n}$, die kleiner oder gleich der Dimension von H_0 ist, positive reelle Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_{\tilde{n}}$ und ortho-normierte Elemente $y_1, \dots, y_{\tilde{n}}$ von H_0 , $f_1, \dots, f_{\tilde{n}}$ von K_0 mit den folgenden Eigenschaften:

- 1.) Die f_k sind Eigelemente von GG^* , $GS_X G^*$ und S zu Eigenwerten α_k , ν_k , τ_k . Es ist $\sum_{k=1}^{\tilde{n}} \alpha_k = \beta$ und

$$\nu_k = \mu_k \sum_n \sigma_n |(y_k, x_n)|^2 ,$$

wenn σ_n die Eigenwerte von S_x zu den Eigenelementen x_n aus der Darstellung (1) sind.

2.) Das maximale Element G ist von der Form

$$(14) \quad Gx = \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \sqrt{\mu_k} (x, y_k) f_k \quad x \in H_0$$

und der Wert des Funktionals $\mathcal{D}$ an der Stelle G gleich

$$(15) \quad \mathcal{D}(G) = \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \sum_n \frac{\mu_k}{\mu_k \mu_k} \sigma_n |(y_k, x_n)|^2$$

Beweis

a) Es sei $y_k := \frac{1}{\sqrt{\mu_k}} G^* f_k$ für $k \in \tilde{\mathcal{K}}$ (nach Lemma 6). Die y_k sind orthonormiert, denn

$$(y_k, y_l) = \frac{1}{\sqrt{\mu_k \mu_l}} (f_k, G G^* f_l)_0 = \delta_{kl} .$$

Da notwendig $G y_k = \sqrt{\mu_k} f_k$ gelten muß, erhält man die Summendarstellung

$$Gx = \sum_{k \in \tilde{\mathcal{K}}} \sqrt{\mu_k} (x, y_k) f_k \quad x \in H_0 .$$

Da die y_k orthonormiert sind, ist die Mächtigkeit der Menge $\tilde{\mathcal{K}}$ kleiner oder gleich der Dimension von H_0 .

b) Für $G S_x G^*$ folgt daher aus der Darstellung (1) von S_x :

$$\nu_k f_k = G S_x G^* f_k = \sqrt{\mu_k} \sum_{l \in \tilde{\mathcal{K}}} \sqrt{\mu_l} \left\{ \sum_n \sigma_n (y_k, x_n) (x_n, y_l) \right\} f_l$$

und, da die f_k orthonormiert sind

$$(16) \quad \nu_k = \mu_k \sum_n \sigma_n |(y_k, x_n)|^2 .$$

Außerdem erhält man noch

$$\mathcal{D}(G) = \sum_n \|M_G^{u_n} G S_X^{u_n} x_n\|^2 = \sum_{k \in \tilde{\mathcal{K}}} \sum_n \frac{u_k}{\varepsilon_k + c u_k} \sigma_n |(y_k, x_n)|^2$$

c) Die Behauptung des Satzes ist also dann richtig, wenn die Indexmenge $\tilde{\mathcal{K}}$ endlich ist, da man ja stets umnumerieren kann.

Aus (13) erhält man $y_k \gg (\kappa \alpha) u_k$, was wegen $u_k > 0$ aus (16)

$$\sum_n \sigma_n |(y_k, x_n)|^2 \gg \kappa \alpha > 0$$

für alle $k \in \tilde{\mathcal{K}}$ ergibt. Da aber für die orthonormierten y_k die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{k \in \tilde{\mathcal{K}}} \sum_n \sigma_n |(y_k, x_n)|^2 \leq \sum_n \sigma_n < \infty$$

liefert, geht das nur, wenn $\tilde{\mathcal{K}}$ endlich ist.

Mit diesen Vorbereitungen können wir die Menge der Maxima des Funktionals $\mathcal{D}$ auf der Menge $\mathcal{G}_B$ charakterisieren, falls sie nicht leer ist.

Satz 8 Voraussetzungen und Bezeichnung wie in Satz 7.

$G_1 \in \text{HS}(H_0, K_0)$ sei gegeben durch

$$G_1 x = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \sqrt{u_i} (x, x_{k_i}) f_i,$$

wobei die k_i paarweise verschiedene Elemente aus der Indexmenge des Orthonormalsystems (x_k) sind, die der Bedingung

$$(17) \quad \sigma_{k_i} \gg \sigma_k \quad 1 \leq i \leq \tilde{n}, \quad k \notin \{k_1, \dots, k_{\tilde{n}}\}$$

genügen. Dann gibt es einen mit S_x vertauschbaren unitären Operator U in H_0 mit $GU = G_1$ und es ist $\mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(G_1)$.

Ist außerdem der Operator S von der Form

$$Sf = \sum_{p \in \mathbb{N}} \varepsilon_p (f, \varepsilon_p)_0 \varepsilon_p \quad g_p f \in D_S$$

mit einem vollständigen Orthonormalsystem (g_p) von K_0 und reellen Zahlen $\tau_p \geq \alpha > 0$, dann gibt es $\tilde{n}$ paarweise verschiedene Indices $p_1, \dots, p_{\tilde{n}}$ mit der Eigenschaft

$$(18) \quad \tau_{p_i} \leq \tau_p \quad 1 \leq i \leq \tilde{n}, \quad p \notin \{p_1, \dots, p_{\tilde{n}}\},$$

sowie einen mit S vertauschbaren unitären Operator V in K_0 , so daß $VG_1 = G_2$, wo

$$G_2 x = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \sqrt{\mu_i} (x, x_{k_i}) g_{p_i}$$

Beweis

a) Nach Satz 5 ist G^*G mit S_x vertauschbar und aus Satz 7

$$\text{entnimmt man wegen } G^*Gx = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \mu_i (x, y_i) y_i; \mu_i > 0,$$

daß jedes y_i in einem Eigenraum $\mathcal{E}_i$ des Operators S_x liegt. Wegen der Orthonormalität ist die Anzahl der y_i , die im gleichen Eigenraum von S_x liegen, nicht größer als die (endliche) Dimension dieses Eigenraums. Man kann daher unitäre Transformationen $U_{\mathcal{E}}$ dieser Eigenräume $\mathcal{E}$ in sich und paarweise verschiedene Indices $k_1, \dots, k_{\tilde{n}}$ finden mit $y_i = U_{\mathcal{E}_i} x_{k_i}$. Die direkte Summe U dieser $U_{\mathcal{E}}$ ist ein mit S_x vertauschbarer unitärer Operator in H_0 mit der Eigenschaft $G_1 = GU$. Aus Lemma 2 erhält man $\mathcal{D}(G_1) = \mathcal{D}(G)$ und aus

$$(19) \quad \mathcal{D}(G_1) = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{\mu_i \sigma_{k_i}}{\tau_i + \mu_i}$$

folgt unmittelbar (17), da man aus $\sigma_{k_j} < \sigma_{k_0}$ und mit dem Operator

$$\tilde{G}_1 x = \sum_{i \neq j} \sqrt{\mu_i} (x, x_{k_i}) f_i + \sqrt{\mu_j} (x, x_{k_0}) f_{k_j}$$

die Ungleichung $\mathcal{D}(G_1) < \mathcal{D}(\tilde{G}_1)$ im Widerspruch zur Maximalität erhalten würde.

b) beweist man analog a) aus der Vertauschbarkeit von S^{-1} mit $G_1 G_1^*$ und (19).

§ 11 Hinreichende Bedingungen für die Lösbarkeit des diskreten Optimierungsproblems

a) globale Beschränkung

Die notwendigen Bedingungen für ein Maximum von $\mathcal{D}$ auf der Menge $\mathcal{G}_B$ aus Satz 10.7 und Satz 10.8 legen es nahe, für die Operatoren S_x und S die folgenden Eigenschaften zu fordern:

Voraussetzung 1 $S_x: H_0 \rightarrow H_0$ sei wie in (10.1) gegeben, wobei die Numerierung so vorgenommen sei, daß die Folge $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ der positiven Eigenwerte von S_x monoton nichtsteigend ist (stets möglich, da (σ_k) eine Nullfolge).

$S: D_S \rightarrow K_0$ sei für alle $f \in D_S$ von der Form

$$(1) \quad Sf = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n(f, f_n)_0 f_n \quad f, f_n \in D_S \text{ für alle } n,$$

mit einem vollständigen Orthonormalsystem (f_n) von K_0 und den Eigenwerten $\tau_n > 0$, die (vgl. Satz 10.8) eine monoton nichtfallende Folge (τ_n) bilden mögen.

Wie Beispiel 8.2 zeigt, ist die Voraussetzung über $S = S(\lambda)$ im Modell des § 3 erfüllt.

Für natürliche Zahlen m, n - $1 \leq m \leq h_0$ bei endlicher Dimension h_0 von H_0 - seien H_m bzw. $\hat{K}_n$ die von den $x_1, \dots, x_m$ bzw. $f_1, \dots, f_n$ aufgespannten Unterräume von H_0 bzw. K_0 . Für $m \leq n$ sei $\mathcal{X}(m, n)$ die Menge der $G \in B(H_0, K_0)$, deren Nullraum das orthogonale Komplement von H_m umfaßt und deren Werte in $\hat{K}_n$ liegen. Jedes solche G ist insbesondere ein HS-Operator. Für $B > 0$ sei weiterhin $\mathcal{G}_B(m, n)$ die Menge der $G \in \mathcal{X}(m, n)$ mit $\|G\|_{HS}^2 \leq B$.

Die Vereinigung der $\mathcal{X}(m, n)$; $m \leq n$; liegt dicht in $HS(H_0, K_0)$ und die der $\mathcal{G}_B(m, n)$ dicht in $\mathcal{G}_B$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{HS}$.

$\mathcal{G}_B(m,n)$ ist eine kompakte Teilmenge von $HS(H_0, K_0)$, da endlichdimensional. $\mathcal{D}$ ist als differenzierbares Funktional insbesondere stetig und besitzt daher ein Maximum auf $\mathcal{G}_B(m,n)$. Da H_m bzw. $\hat{K}_n$ invariante Unterräume von S_x bzw. S sind, lassen sich die Ergebnisse des Paragraphen 10 auf $\mathcal{H}(m,n)$ anstelle von $HS(H_0, K_0)$ anwenden und man erhält aus Satz 10.8:

Satz 2 Unter der Voraussetzung 1 ist ein $\mathcal{D}$ auf $\mathcal{G}_B(m,n)$ maximierendes Element $G_{m,n}^{(\beta)}$ gegeben durch

$$(2) \quad G_{m,n}^{(\beta)} x = \sum_{i=1}^m \sqrt{\mu_i} (x, x_i) f_{p_i}, \quad x \in H_0$$

Dabei sind die μ_i nichtnegative reelle Zahlen mit $\sum_{i=1}^m \mu_i = \beta$ und $\mathcal{P} = (p_1, \dots, p_m)$ eine Permutation der Zahlen $1, \dots, m$. Der Wert des Funktionals $\mathcal{D}$ an dieser Stelle ist gleich

$$(3) \quad \mathcal{D}(G_{m,n}^{(\beta)}) = \sum_{i=1}^m \frac{\mu_i \sigma_i}{\tau_{p_i} + \mu_i}$$

und jedes andere maximierende Element ist darstellbar als $V_n G_{m,n}^{(\beta)} U_m$, wo U_m bzw. V_n unitäre, mit S_x bzw. S vertauschbare Operatoren in H_m bzw. $\hat{K}_n$ sind.

Zur endgültigen Charakterisierung müssen nur noch die μ_i und die Permutation $\mathcal{P}$ bestimmt werden.

Lemma 3 Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Satz 2. Bei vorgegebener fester Permutation $\mathcal{P} = (p_1, \dots, p_m)$ und $\beta > 0$ wird die Summe (3) in Abhängigkeit von $\mu_i > 0$ und $\sum_{i=1}^m \mu_i = \beta$ maximal für

$$(4) \quad \mu_i(\mathcal{P}) = \max \{ \lambda(\mathcal{P}) \sqrt{\sigma_i \tau_{p_i}} - \tau_{p_i}, 0 \}$$

wobei $\lambda(\mathcal{P}) > 0$ eindeutig bestimmt ist durch

$$(5) \quad g_m(\mathcal{P}, \lambda(\mathcal{P})) := \sum_{i=1}^m \max \{ \lambda(\mathcal{P}) \sqrt{\sigma_i \tau_{p_i}} - \tau_{p_i}, 0 \} = \beta$$

Der Wert der Summe (3) an dieser Stelle ist gleich

$$(6) \quad f^{(m)}(\mathcal{Y}, \lambda(\mathcal{Y})) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda(\mathcal{Y})} \sigma_i \max \left\{ \lambda(\mathcal{Y}) - \sqrt{\frac{\tau_{p_i}}{\sigma_i}}, 0 \right\}$$

Beweis

Die Summe (3) besitzt ein Maximum $\mu(\mathcal{Y}) = (\mu_1(\mathcal{Y}), \dots, \mu_m(\mathcal{Y}))$ unter den Nebenbedingungen $\mu_i \geq 0$, $\sum_i \mu_i = \beta$ und die Kuhn-Tuckerschen notwendigen Bedingungen (loc.cit. Lemma 10.4) liefern die Existenz nichtnegativer reeller Zahlen $\kappa, \kappa_1, \dots, \kappa_m$ mit

$$(7) \quad \sigma_i \tau_{p_i} = (\kappa - \kappa_i)(\tau_{p_i} + \mu_i(\mathcal{Y}))^2 \quad 1 \leq i \leq m$$

$\kappa_i = 0$, falls $\mu_i(\mathcal{Y}) \neq 0$, und $\kappa = 0$ falls $\sum_i \mu_i(\mathcal{Y}) < \beta$.

Aus (7) folgt $\kappa > 0$ und damit $\sum_i \mu_i(\mathcal{Y}) = \beta$. Falls (4) gezeigt ist, folgt damit (5).

Zum Beweis von (4): Ist $\mu_i(\mathcal{Y}) > 0$, so ist nach (7)

$$\mu_i(\mathcal{Y}) = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sqrt{\sigma_i \tau_{p_i}} - \tau_{p_i} > 0$$

und ist $\mu_i(\mathcal{Y}) = 0$, so ist nach (7) $\frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sqrt{\sigma_i \tau_{p_i}} \leq \tau_{p_i}$.

Daraus folgt (4) mit $\lambda(\mathcal{Y}) = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}$. $\lambda(\mathcal{Y})$ ist eindeutig bestimmt, da $g_m(\mathcal{Y}, \lambda)$ bei positiven Werten streng monoton steigt und (6) folgt direkt aus (3) und (4).

Wir zeigen jetzt, daß nach Einsetzen der $\mu_i(\mathcal{Y})$ in (3) das Maximum von der Einheitspermutation $\mathfrak{n} = (1, 2, \dots, m)$ angenommen wird. Da jede Permutation aus $\mathfrak{n}$ durch eine endliche Anzahl von Transpositionen hervorgeht und eine Transposition jeweils nur 2 Summanden aus den Summen (5) und (6) beeinflußt, sieht man sofort, daß die Behauptung aus dem nachstehenden Lemma folgt, in dem wir o.B.d.A. annehmen, daß es sich um die ersten beiden Summanden handelt:

Lemma 4 Es sei $m = 2$, $\beta > 0$, $\mu = (1, 2)$ und $\mathcal{Y} = (2, 1)$.
Ist $\lambda_0 > 0$ und $\lambda_1 > 0$ so gewählt, daß

$$(8) \quad g_2(\mathcal{Y}, \lambda_0) = g_2(\mu, \lambda_1) = \beta \quad ,$$

dann ist

$$(9) \quad f^{(2)}(\mathcal{Y}, \lambda_0) \leq f^{(2)}(\mu, \lambda_1) \quad ,$$

$g_2, f^{(2)}$ wie in (5) und (6).

Beweis

- a) Es sei $\alpha_j := \sqrt{\sigma_j}$ und $\beta_j := \sqrt{\tau_j}$, $j = 1, 2$. Wir nehmen an, daß $\alpha_1 \beta_1 \leq \alpha_2 \beta_2$. Der Beweis verläuft im anderen Fall analog. Es gilt dann wegen $\alpha_1 > \alpha_2$ und $\beta_1 \leq \beta_2$:

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} \leq \frac{\beta_2}{\alpha_2} \leq \frac{\beta_2}{\alpha_1} \leq \frac{\beta_2}{\alpha_2}$$

$f^{(2)}(\mu, \lambda)$, $g_2(\mu, \lambda)$ sind für $\lambda > \frac{\beta_1}{\alpha_1}$, $f^{(2)}(\mathcal{Y}, \lambda)$ und $g_2(\mathcal{Y}, \lambda)$ für $\lambda > \frac{\beta_1}{\alpha_2}$ streng monoton steigend. Für $\lambda \geq \frac{\beta_2}{\alpha_2}$ gilt außerdem

$$(10) \quad \begin{aligned} g_2(\mu, \lambda) - g_2(\mathcal{Y}, \lambda) &= \lambda(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) \leq 0 \\ f^{(2)}(\mu, \lambda) - f^{(2)}(\mathcal{Y}, \lambda) &= \frac{4}{\lambda}(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_2 - \beta_1) \geq 0 \quad , \end{aligned}$$

woraus für $\lambda_1 \geq \frac{\beta_1}{\alpha_2}$ folgt $\lambda_1 > \lambda_0$ und damit (9).

- b) Wegen $\beta > 0$ ist $\lambda_0 > \frac{\beta_1}{\alpha_2}$ und für $\frac{\beta_1}{\alpha_2} \leq \lambda_0 \leq \frac{\beta_2}{\alpha_1}$ erhält man aus $g_2(\mathcal{Y}, \lambda_0) \leq g_2(\mathcal{Y}, \frac{\beta_2}{\alpha_1}) \leq g_2(\mu, \frac{\beta_2}{\alpha_2})$, daß $\lambda_1 \leq \frac{\beta_2}{\alpha_2}$,
woraus man mit der Gleichung (8) $\lambda_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \lambda_0$ ermittelt.
Dies eingesetzt ergibt

$$f^{(2)}(\mu, \lambda_1) - f^{(2)}(\mathcal{Y}, \lambda_0) = \frac{4}{\lambda_0}(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)(\lambda_0 - \frac{\beta_1}{\alpha_2}) \geq 0$$

und damit (9).

- c) Im Falle $\lambda_0 \geq \frac{\beta_2}{\alpha_1}$ braucht man wegen (10) nur noch den Fall zu betrachten, daß λ_0 und λ_1 kleiner oder gleich β_2/α_2 sind. Aus (8) erhält man unter dieser Bedingung

$$\lambda_1 = \frac{\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 \beta_1} \lambda_0 - \frac{\beta_2^2}{\alpha_1 \beta_1}$$

und Einsetzen ergibt: $f^{(2)}(n, \lambda_1) - f^{(2)}(g, \lambda_0) \geq 0$ genau dann, wenn

$$h(\lambda_0) = \lambda_0^2 \alpha_2^2 A - \lambda_0 (A^2 - \alpha_1^2 \beta_1^2 + \alpha_2^2 \beta_2^2) + \beta_2^2 A \leq 0$$

mit $A = \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1$. Die Funktion h ist konvex und an den Endpunkten des für λ_0 zulässigen Intervalls nach Teil a) und b) nichtpositiv, also für alle zulässigen λ_0 , womit auch in diesem Fall (9) gezeigt ist.

Definition 5 $\mathcal{K}$ sei die Indexmenge der Eigenwerte σ_k des Operators S_x nach (10.1), also entweder gleich $\{1, \dots, h_0\}$ oder gleich $\mathbb{N}$. Für eine Teilmenge $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ und reelle Zahlen $\varphi \geq 0$ seien

$$(11) \quad \mu_k(\varphi) := \max \{ \varphi \sqrt{\sigma_k \tau_k} - \tau_k, 0 \} \quad k \in \mathcal{L}$$

$$(12) \quad \varphi_{\mathcal{L}}(\varphi) := \sum_{k \in \mathcal{L}} \mu_k(\varphi)$$

und $G_{\mathcal{L}, \varphi} : H_0 \rightarrow K_0$ definiert durch

$$(13) \quad G_{\mathcal{L}, \varphi} x = \sum_{k \in \mathcal{L}} \sqrt{\mu_k(\varphi)} (x, x_k) f_k \quad x \in H_0.$$

Satz 6 Es gelte Voraussetzung 1 und es sei $\beta > 0$. Dann gibt es genau ein $\varphi_0 > 0$ mit $\varphi_{\mathcal{K}}(\varphi_0) = \beta$ und $G_{\mathcal{K}, \varphi_0}$ ist ein Maximum des Funktionals $\mathcal{D}$ auf $\mathcal{G}_{\beta}$. Außerdem ist

$$(14) \quad \mathcal{D}(G_{\mathcal{K}, \varphi_0}) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \frac{\sigma_k \mu_k(\varphi_0)}{\tau_k + \mu_k(\varphi_0)}$$

Beweis

- a) Es sei $m \in \mathcal{K}$ und $\mathcal{L}_m := \{1, \dots, m\}$. Da $\varphi_{\mathcal{L}_m}(\varphi) = 0$ für $\varphi \leq \sqrt{\tau_{\sigma_1}}$ und streng monoton steigend und nicht beschränkt für $\varphi > \sqrt{\tau_{\sigma_1}}$, gibt es genau ein $\varphi_m > 0$ mit $\varphi_{\mathcal{L}_m}(\varphi_m) = \beta$. Nach Lemma 3 und Lemma 4 ist $G_{\mathcal{L}_m, \varphi_m}$ für alle $n \geq m$ ein Maximum von $\mathcal{D}$ auf $\mathcal{G}_\beta(m, n)$ und somit auf $\mathcal{G}_\beta[m] = \bigcup_{n \geq m} \mathcal{G}_\beta(m, n)$.
- b) Ist die Dimension von H_0 endlich und gleich h_0 , so liegt $\mathcal{G}_\beta[h_0]$ dicht in $\mathcal{G}_\beta$ und $G_{\mathcal{L}_{h_0}, \varphi_{h_0}}$ ist wegen der Stetigkeit von $\mathcal{D}$ auch Maximum auf $\mathcal{G}_\beta$. Die Behauptung folgt aus $\mathcal{K} = \mathcal{L}_{h_0}$.
- c) Ist $\mathcal{K} = \mathcal{N}$, so ist die Folge $(\tau_{\sigma_k})_{k \in \mathcal{K}}$ nach oben unbeschränkt wachsend und es gibt daher zu β ein $m_0 = m_0(\beta)$ mit
- $$\varphi_m = \varphi_{m_0} \text{ und } \varphi_{\mathcal{L}_m}(\varphi_{m_0}) = \varphi_{\mathcal{K}}(\varphi_{m_0}) = \beta$$
- für alle $m \geq m_0$. Daher ist $G_{\mathcal{K}, \varphi_{m_0}} = G_{\mathcal{L}_{m_0}, \varphi_{m_0}}$ ein Maximum auf $\bigcup_m \mathcal{G}_\beta[m]$ und aus den selben Gründen wie in b) ein Maximum von $\mathcal{D}$ auf $\mathcal{G}_\beta$.
- d) Die Eindeutigkeit von $\varphi_0 = \varphi_{m_0}$ folgt aus der strengen Monotonie von $\varphi_{\mathcal{K}}$ für $\varphi > \sqrt{\tau_{\sigma_1}}$ und (14) aus (3).

b) Einzelbeschränkungen

Gesucht sind nunmehr Aussagen über die Struktur eines $\mathcal{D}$ maximierenden Elements auf Mengen

$$(15) \quad \mathcal{G}(P_1, \dots, P_p; B_1, \dots, B_p) = \{G \in \text{HS}(H_0, K_0); \|GP_q\|_{\text{HS}}^2 \leq \beta_q, 1 \leq q \leq p\}$$

wobei $\beta_q > 0$ reelle Zahlen und die P_q Projektionen auf paarweise orthogonale Unterräume $P_q(H_0)$ von H_0 mit

$$\sum_{q=1}^P P_q = I_{H_0} \text{ sind.}$$

Wie Beispielrechnungen bereits für $H_0 = \mathbb{C}^2$ zeigen, erhält man eine von den β_q unabhängige Aussage über die Struktur des maximierenden Elements nur noch unter der

Voraussetzung 7 Die Projektionsoperatoren P_q sind mit S_x vertauschbar und $S = \alpha I_{K_0}$ mit $\alpha > 0$ und I_{K_0} als identischem Operator in K_0 .

Die praktische Bedeutung der Vertauschbarkeitsforderung wurde bereits in § 9 veranschaulicht. Die Bedingung an S wird zum Beispiel von "weißem Rauschen" erfüllt.

Unter der Voraussetzung 7 ist S_x von der Form

$$(16) \quad S_x y = \sum_{q=1}^P \sum_{k \in \mathcal{K}_q} \sigma_k^{(q)} (y, s_k^q) s_k^q, \quad ,$$

wobei die $(s_k^q)_{k \in \mathcal{K}_q}$ Orthonormalsysteme in H_0 sind, die jeweils Basen der Unterräume $H_q = P_q(H_0)$ sind, und $\sigma_k^{(q)}$ positive reelle Zahlen mit

$$\sum_{q=1}^P \sum_{k \in \mathcal{K}_q} \sigma_k^{(q)} < \infty$$

Seien ferner $U: H_0 \rightarrow K_0$ eine isometrische Abbildung und $\hat{K}_q$ die Unterräume $U(H_q)$ von K_0 . Dann gilt

Satz 8 Unter Voraussetzung 7 ist ein Maximum G_0 von $\mathcal{D}$ auf der Menge $\mathcal{G}(P_1, \dots, P_P; \beta_1, \dots, \beta_P)$ gegeben durch

$G_0 = \sum_{q=1}^P G_q$, wobei die $G_q \in \text{HS}(H_q, \hat{K}_q)$ das Funktional $\mathcal{D}$ auf der Menge der $\tilde{G} \in \text{HS}(H_q, \hat{K}_q)$ mit $\|\tilde{G}\|_{\text{HS}}^2 \leq \beta_q$ maximieren.

Beweis

a) Nach Lemma 10.1.c bleibt unter Voraussetzung 7 der Wert des Funktionals $\mathcal{D}$ unverändert, wenn man von einem beliebigen $G \in \text{HS}(H_0, K_0)$ übergeht zu VG mit einer unitären

Abbildung V in K_0 . Mit G liegt auch VG in $\mathcal{G}(P_1, \dots, P_p; B_1, \dots, B_p)$, so daß wir uns auf HS-Operatoren $G: H_0 \rightarrow K_0$ der Form

$$Gx = \sum_{n \in \mathcal{K}} \sqrt{\mu_n} (x, x_n) f_n \quad ; \quad \mu_n \geq 0, \quad \sum_n \mu_n < \infty$$

mit $\mathcal{K} = \bigcup_{q=1}^p \mathcal{K}_q$, Orthonormalsystemen $(x_n), (f_n)$ von H_0 bzw. K_0 so, daß $(f_n)_{n \in \mathcal{K}_q}$ den Raum $\hat{K}_q$ aufspannt, beschränken können. Dann ist

$$\mathcal{D}(G) = \sum_{q=1}^p \sum_{k \in \mathcal{K}_q} \sum_{n \in \mathcal{K}} \frac{\mu_n \sigma_k^{(q)}}{\alpha + \mu_n} |(s_k^q, x_n)|^2$$

und

$$\|GP_q\|_{HS}^2 = \sum_{k \in \mathcal{K}_q} \sum_{n \in \mathcal{K}} \mu_n |(s_k^q, x_n)|^2 \leq \beta_q.$$

- b) Die Funktion $f(\mathfrak{J}) := \frac{\mathfrak{J}}{\alpha + \mathfrak{J}}$ ist für $\mathfrak{J} > 0$ konkav und stetig. Daher gilt für Folgen $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ nichtnegativer reeller Zahlen mit $\sum_i \alpha_i < \infty$ und $\sum_i \lambda_i = 1$

$$f\left(\sum_i \lambda_i \alpha_i\right) \geq \sum_i \lambda_i f(\alpha_i).$$

Daraus ergibt sich für $\mathcal{D}(G)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(G) &= \sum_{q=1}^p \sum_{k \in \mathcal{K}_q} \sigma_k^{(q)} \sum_{n \in \mathcal{K}} |(s_k^q, x_n)|^2 f(\mu_n) \leq \\ (17) \quad &\leq \sum_{q=1}^p \sum_{k \in \mathcal{K}_q} \sigma_k^{(q)} f\left(\sum_{n \in \mathcal{K}} |(s_k^q, x_n)|^2 \mu_n\right) = \\ &= \sum_{q=1}^p \sum_{k \in \mathcal{K}_q} \frac{\sigma_k^{(q)} \mathfrak{J}_k^{(q)}}{\alpha + \mathfrak{J}_k^{(q)}} \end{aligned}$$

mit $\mathfrak{J}_k^{(q)} \geq 0$ und $\sum_{k \in \mathcal{K}_q} \mathfrak{J}_k^{(q)} \leq \beta_q.$

Wählt man $G_q = G_{\mathcal{K}_q, \mathcal{P}_q}$ gemäß Definition 5 mit $\beta_{\mathcal{K}_q}(\mathcal{P}_q) = \beta_q$ und $\sigma_k^{(q)}$ bzw. s_k^q anstelle von σ_k bzw. x_k , so erhält man aus Satz 6 und (17)

$$\mathcal{D}(G) \leq \sum_{q=1}^P \mathcal{D}(G_q) = \mathcal{D}\left(\sum_{q=1}^P G_q\right).$$

$G_o = \sum_{q=1}^P G_q$ ist außerdem aus $\mathcal{G}(P_1, \dots, P_P; B_1, \dots, B_P)$,
denn $\|G_o P_q\|_{HS}^2 = \|G_q\|_{HS}^2 = B_q$, womit die Behauptung gezeigt ist.

§ 12 Das skalare Optimierungsproblem

Wir kommen wieder auf die Optimierungsaufgabe aus § 9 zurück. Gemäß den Voraussetzungen 8.2 und 11.1 nehmen wir folgendes an:

Voraussetzung 1 Die Abbildungen $\lambda \mapsto S_x(\lambda)$ und $\lambda \mapsto S(\lambda)$ seien gegeben durch

$$S_x(\lambda)y = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(\lambda) \cdot (y, x_k(\lambda)) \cdot x_k(\lambda) \quad y \in H$$

$$S(\lambda)f = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n(\lambda) \cdot (f, f_n(\lambda)) \cdot f_n(\lambda) \quad f \in D_S(\lambda)$$

mit meßbaren Funktionen $\lambda \mapsto \sigma_k(\lambda) \geq 0$ und $\lambda \mapsto \tau_k(\lambda) \geq \alpha > 0$, stark meßbaren Abbildungen $\lambda \mapsto x_k(\lambda) \in H$ und $\lambda \mapsto f_n(\lambda) \in D_S(\lambda) \subset K_0$, so daß für τ -fast alle $\lambda \in I$ gilt:

Die Folge $(\sigma_k(\lambda))$ ist monoton nichtsteigend, $(\tau_n(\lambda))$ monoton nichtfallend und $(x_k(\lambda))$ bzw. $(f_n(\lambda))$ sind vollständige Orthonormalsysteme von H bzw. K_0 . Außerdem sei

$$\int_I \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(\lambda) \tau(d\lambda) < \infty$$

Den Fall endlicher Dimension h von H betrachten wir als Spezialfall, indem wir $\sigma_k(\lambda)$ und $x_k(\lambda)$ für $k > h$ identisch Null setzen.

Der Integrand des Funktional $\tilde{D}_0$ aus (9.2) sei mit $\tilde{\mathcal{D}}_\lambda(F(\lambda))$ bezeichnet.

Globale Beschränkung durch B_0

Es sei $\lambda \mapsto B(\lambda)$ eine nichtnegative meßbare Funktion mit

$$\int_I B(\cdot) d\tau = B_0. \text{ Aus Satz 11.6 und den Überlegungen zu}$$

Beginn des § 10 entnehmen wir, daß $\tilde{D}_\lambda(\cdot)$ bei festem λ ein Maximum F_λ unter der Nebenbedingung $\|FS_X^{\lambda_2}(\lambda)\|_{HS}^2 \leq B(\lambda)$ besitzt, welches durch eine Folge $(\mu_k(\cdot))_{k \in \mathbb{N}}$ nichtnegativer meßbarer Funktionen $\lambda \mapsto \mu_k(\lambda)$ wie folgt gegeben ist:

$$(1) \quad F_\lambda S_X^{\lambda_2}(\lambda)y = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\mu_k(\lambda)} (y, x_k(\lambda)) f_k(\lambda) \quad y \in H$$

$$(2) \quad \|F_\lambda S_X^{\lambda_2}(\lambda)\|_{HS}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(\lambda) = B(\lambda)$$

Außerdem gilt dann

$$(3) \quad \tilde{D}_\lambda(F_\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k(\lambda) \sigma_k(\lambda)}{\tau_k(\lambda) + \mu_k(\lambda)}$$

Aus (1) und (2) erhält man, daß die Abbildung $\lambda \mapsto F_\lambda$ ein Element von $\mathcal{L}^2(\tau, S_X, H, K_0)$ ist und die zugehörige Äquivalenzklasse in $\mathcal{F}_{B_0}$ liegt. Um ein Maximum von $\tilde{D}_0$ auf $\mathcal{F}_{B_0}$ zu bestimmen, kann man sich daher auf solche Abbildungen $\lambda \mapsto F_\lambda$ und die Variation der Funktion $B(\cdot)$ beschränken. Wegen (1) und (2) bedeutet das aber nichts anderes als die Angabe geeigneter Funktionen $\mu_k(\cdot)$.

Es seien $s, t: \mathcal{R}_+ \longrightarrow \mathcal{R}_+$ definiert durch

$$(4) \quad \begin{aligned} s(j) &= \sigma_k(\lambda) & \text{für } k-1 \leq j < k \\ t(j) &= \tau_k(\lambda) & \text{und } j = \lambda + k-1 \end{aligned}$$

$\mathcal{L}^+$ die Menge der im Lebesgueschen Sinne integrierbaren nichtnegativen Funktionen $f: \mathcal{R}_+ \longrightarrow \mathcal{R}_+$ und $\mathcal{J}: \mathcal{L}^+ \longrightarrow \mathcal{R}_+$ das durch

$$(5) \quad \mathcal{J}(f) = \int_{\mathcal{R}_+} \frac{s(j)f(j)}{t(j)+f(j)} dj$$

definierte Funktional. Für $B > 0$ sei ferner $\mathcal{L}_B^+$ die Menge der $f \in \mathcal{L}^+$ mit $\int_{\mathcal{R}_+} f(j) dj \leq B$.

Satz 2 Die Spektralmaße C_X und C_N mögen Spektraldichten S_X und S_N bezüglich des Lebesgueschen Maßes auf $I = [0,1]$ besitzen und für diese Spektraldichten gelten die Voraussetzungen 8.2 und 12.1. Dann gilt: Ist $\tilde{f}$ ein Maximum von $\mathcal{J}$ auf der Menge $\mathcal{L}_B^+$, dann liefern die Funktionen $\mu_k(\lambda) = \tilde{f}(k-1+\lambda)$ durch (1) ein Maximum F von $\tilde{D}_0$ auf $\mathcal{F}_B$ und umgekehrt.

Beweis

folgt unmittelbar aus (2) und (3) wegen

$$\int_I \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(\lambda) d\lambda = \int_{\mathcal{R}_+} \tilde{f}(\mathfrak{f}) d\mathfrak{f} \in B$$

und

$$\int_I \tilde{D}_\lambda(F_\lambda) d\lambda = \mathcal{J}(\tilde{f})$$

Aus Satz 10.8 erhält man dann weiterhin, daß jede andere maximierende Abbildung $\lambda \mapsto F(\lambda)$ von der Form $F(\lambda) = V_\lambda F_\lambda U_\lambda$ ist, wobei U_λ und V_λ unitäre, mit $S_X(\lambda)$ bzw. $S(\lambda)$ vertauschbare Operatoren sind.

Lemma 3 Für alle $\kappa \in \mathcal{R}_+$ ist die Funktion

$$(6) \quad \mathfrak{f} \mapsto f_\kappa(\mathfrak{f}) := \max \left\{ \kappa \sqrt{s(\mathfrak{f})t(\mathfrak{f})} - t(\mathfrak{f}), 0 \right\}$$

aus $\mathcal{L}_+^+$. Ist $\int_{\mathcal{L}_+} s(\mathfrak{f}) d\mathfrak{f} > 0$, so gibt es zu jedem $B > 0$ genau ein $\kappa > 0$ mit

$$(7) \quad \mathcal{J}(\kappa) := \int_{\mathcal{R}_+} f_\kappa(\mathfrak{f}) d\mathfrak{f} = B$$

Beweis

a) Integrierbarkeit von f_κ . Sie ist für $\kappa = 0$ klar. Sei daher $\kappa > 0$ fest vorgegeben und

$$(8) \quad \Delta_\kappa := \{ \mathfrak{f} \in \mathcal{R}_+ ; f_\kappa(\mathfrak{f}) > 0 \}$$

Es ist $0 \leq f_x(\xi) \leq \chi_{\Delta_x}(\xi) \cdot [\kappa^2 s(\xi) - \alpha]$, und da die majorisierende Funktion nach (4) integrierbar, ist $f_x \in \mathcal{L}^+$.

- b) Die Funktion J ist wegen $f_\ell(\xi) \leq f_x(\xi)$ für $\ell \leq x$ monoton nichtfallend mit $J(0) = 0$. Aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt außerdem sofort die Stetigkeit von J .

Nach der Voraussetzung über s gibt es ein $\varepsilon > 0$, ein $\delta > \alpha$ und eine meßbare Menge $\Delta \subset \mathbb{R}_+$ mit Lebesgueschem Maß $0 < |\Delta| < \infty$, so daß für alle $\xi \in \Delta$ gilt: $s(\xi) > \varepsilon$ und $t(\xi) \leq \delta$. Dann ist aber

$$J(x) \geq \int_{\Delta} f_x(\xi) d\xi \geq (\kappa \sqrt{\varepsilon \alpha} - \delta) |\Delta| \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$$

Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen gibt es daher zu jedem $B > 0$ ein $x > 0$ mit $J(x) = B$.

- c) Dieses x ist eindeutig bestimmt. Angenommen, es gäbe ein $\ell < x$ mit $J(\ell) = B$. Dann ist notwendig $\ell > 0$ und nach (8)

$$J(x) \geq \int_{\Delta_\ell} f_x(\xi) d\xi = (x - \ell) \int_{\Delta_\ell} \sqrt{s(\xi)t(\xi)} d\xi + J(\ell)$$

und

$$\int_{\Delta_\ell} \sqrt{s(\xi)t(\xi)} d\xi \geq \frac{\alpha}{\ell^2} |\Delta_\ell| > 0$$

da Δ_ℓ wegen $J(\ell) = B > 0$ keine Nullmenge sein kann. Dann ist aber $J(\ell) < J(x) = B$. Analog führt man den Fall $\ell > x$ zum Widerspruch.

Satz 4 (vgl. Dejon, Hänsler [1])

Es sei $B > 0$ vorgegeben und x nach Lemma 3 durch $J(x) = B$ eindeutig bestimmt. Dann ist f_x Maximalstelle von $\mathcal{J}$ auf $\mathcal{L}_B^+$ und jedes andere maximale f unterscheidet sich von f_x höchstens auf einer Lebesgueschen Nullmenge.

Beweis

- a) Wegen (7) ist $f_x \in \mathcal{L}_B^+$. Aus (6) und (8) erhält man für die Funktion

$$u(\xi) := \frac{t(\xi)s(\xi)}{(t(\xi)+f_x(\xi))^2}$$

daß $u(\xi) = \frac{1}{x^2}$ für $\xi \in \Delta_x$ und $0 \leq u(\xi) \leq \frac{1}{x^2}$ sonst.

Außerdem ist für jedes $g \in \mathcal{L}^+$ auch das Produkt $\xi \mapsto u(\xi)g(\xi)$ aus $\mathcal{L}^+$.

- b) Ist f ein weiteres Element von $\mathcal{L}_B^+$, so gilt für $g := f - f_x$ und alle $0 < \tau \leq 1$, daß $f_x + \tau g \in \mathcal{L}_B^+$ und wegen der Konkavität des Funktional $\mathcal{J}$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} (9) \quad \mathcal{J}(f) - \mathcal{J}(f_x) &\leq \frac{1}{\tau} [\mathcal{J}(f_x + \tau g) - \mathcal{J}(f_x)] = \\ &= \int_{\mathcal{R}_+} h(\tau, \xi) d\xi \end{aligned}$$

mit

$$h(\tau, \xi) = \frac{t(\xi)s(\xi)g(\xi)}{[t(\xi)+f_x(\xi)+\tau g(\xi)][t(\xi)+f_x(\xi)]}$$

Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz zeigt man, daß

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\mathcal{R}_+} h(\tau, \xi) d\xi = \int_{\mathcal{R}_+} u(\xi)g(\xi) d\xi$$

Da $f \in \mathcal{L}_B^+$, ist $\int_{\mathcal{R}_+} g(\xi) d\xi \leq 0$ und, für $\xi \notin \Delta_x$ erhält man wegen $f_x(\xi) = 0$: $g(\xi) \geq 0$. Das ergibt aber nach a)

$$\int_{\mathcal{R}_+} u(\xi)g(\xi) d\xi \leq \frac{1}{x^2} \int_{\mathcal{R}_+} g(\xi) d\xi \leq 0$$

und wegen (9) $\mathcal{J}(f) \leq \mathcal{J}(f_x)$. f_x ist also Maximalstelle.

- c) Ist f_0 ein weiteres Maximum auf $\mathcal{L}_B^+$, so folgt aus der Konkavität von $\mathcal{J}$ für $0 < \tau < 1$: $\mathcal{J}(\tau f_0 + (1-\tau)f_x) =$
 $= \tau \mathcal{J}(f_0) + (1-\tau) \mathcal{J}(f_x)$ und, da $f_x(\xi) = 0$ für $\xi \notin \Delta_x$

$$\left\{ \frac{\tau f_0(\xi) + (1-\tau) f_\kappa(\xi)}{\tau(\xi) + \tau f_0(\xi) + (1-\tau) f_\kappa(\xi)} - \tau \frac{f_0(\xi)}{\tau(\xi) + f_0(\xi)} - (1-\tau) \frac{f_\kappa(\xi)}{\tau(\xi) + f_\kappa(\xi)} \right\} s(\xi) d\xi = 0.$$

Da $s(\xi) > 0$ auf Δ_κ und die Funktion $\tau \mapsto \frac{\tau}{\tau(\xi) + \tau}$

für alle ξ streng konkav ist, muss $f_0(\xi) = f_\kappa(\xi)$ für alle $\xi \in \Delta_\kappa$ sein. Da aber $f_0 \in \mathcal{L}_\beta^+$ und bereits

$\int_{\Delta_\kappa} f_0(\xi) d\xi = \beta$, ist notwendig $f_0(\xi) = 0$ fast überall auf $\mathbb{R}_+ \setminus \Delta_\kappa$ und damit f_0 und f fast sicher gleich.

Unter den Voraussetzungen von Satz 2 besitzt das Funktional $\tilde{D}_0$ daher ein Maximum unter globaler Beschränkung. Dieses Maximum ist - wie man aus (1) und (6), sowie der Transformation (4) ersieht - gegeben durch eine operatorwertige Abbildung $\lambda \mapsto F(\lambda)$ mit

$$F(\lambda)x = \sum_{k \in \mathcal{K}_\lambda} \frac{\max\{\kappa \sqrt{\sigma_k(\lambda) \tau_k(\lambda)} - \tau_k(\lambda), 0\}}{\sqrt{\sigma_k(\lambda)}} (x, x_k(\lambda)) \cdot f_k(\lambda)$$

für alle x aus dem Wertebereich von $S_x^{1/2}(\lambda)$, wobei $\mathcal{K}_\lambda$ die Menge der Indices k ist, für die $\sigma_k(\lambda) > 0$, und κ die durch

$$\int_I \sum_{k=1}^{\infty} \max\{\kappa \sqrt{\sigma_k(\lambda) \tau_k(\lambda)} - \tau_k(\lambda), 0\} d\lambda = \beta$$

eindeutig bestimmte positive reelle Zahl ist.

Einzelbeschränkungen

Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 2 sei $S(\lambda) = \tau(\lambda)I_{K_0}$ mit einer meßbaren Funktion $\lambda \mapsto \tau(\lambda) > \alpha$ und die Projektionsoperatoren P_q aus Definition 9.1 für fast alle λ mit $S_x(\lambda)$ vertauschbar. Dann ist die Maximierung des Funktional $\tilde{D}_0$ auf der Menge $\mathcal{F}(P_1, \dots, P_p; \beta_1, \dots, \beta_p)$ nach Satz 11.8 auf die Lösung von p Maximierungsproblemen unter globaler Beschränkung zurückführbar:

Die Summe von p Maxima $\tilde{F}_q$ der Einschränkung des Funktionals $\tilde{D}_0$ auf die Mengen der $F_q \in L^2_{C_x}(H_q, \hat{K}_q)$ mit $\|F_q\|^2_{C_x} \leq \beta_q$ - H_q und $\hat{K}_q$ wie in Satz 11.8, $1 \leq q \leq p$ - liefert eine Lösung des Problems unter Einzelbeschränkungen. Da nach den bisherigen Ausführungen unmittelbar ersichtlich ist, wie man zum Beweis vorzugehen hat, wollen wir nicht mehr weiter darauf eingehen.

§ 13 Beispiel: Optimale Signalformen bei der Puls-Amplituden-Modulation

Die stationären Folgen $(f_k^{(m)})_{k \in \mathbb{Z}}$; $1 \leq m \leq M$; aus (1.1) seien paarweise unkorreliert und besitzen Spektraldichten $S_m(\lambda)$ auf dem Intervall $[0, 1]$, von denen wir annehmen, daß sie stetig und positiv sind mit $S_1(\lambda) \geq S_2(\lambda) \geq \dots \geq S_M(\lambda)$. Die zugehörige Folge von Operatoren $X_k: \mathcal{C}^M \rightarrow L^2$ besitzt dann die Spektraldichte

$$S_X(\lambda)z = \sum_{m=1}^M S_m(\lambda) (z, e_m) e_m,$$

mit den Einheitsvektoren e_m des $\mathcal{C}^M$, bezüglich des Lebesgueschen Maßes auf $[0, 1]$. Ferner werde in Abständen von $T = 1$ gesendet.

Wie in Beispiel 8.3 sei $S(\lambda)$ gegeben durch

$$S(\lambda)\varphi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s(\lambda+n) (\varphi, e_n^{(\lambda)}) e_n^{(\lambda)}$$

mit $e_n^{(\lambda)}(t) = e^{j2\pi(\lambda+n)t}$ und wir setzen voraus, daß $s(\lambda)$ stetig und für alle $0 \leq \lambda \leq 1$, sowie alle $n > M$ und $n \leq 0$

$$0 < \alpha \leq s(\lambda+1) \leq s(\lambda+2) \leq \dots \leq s(\lambda+M) \leq s(\lambda+n)$$

Ist $F \in L_{\mathcal{C}_X}^2(\mathcal{C}^M, K_0)$ Maximum von $\tilde{D}_0$ auf $\mathcal{F}_B$, so ist F gegeben durch

$$G(\lambda)z = F(\lambda)S_X^{1/2}(\lambda)z = \sum_{m=1}^M \mu_m(\lambda) (z, e_m) e_m^{(\lambda)},$$

wobei die $\mu_m(\cdot)$ gemäß Satz 12.2 und Satz 12.4 von der Form

$$(1) \quad \mu_m(\lambda) = \max \left\{ \kappa \sqrt{S_m(\lambda)s(\lambda+m)} - s(\lambda+m), 0 \right\}^{1/2}$$

Für den Operator $W = \int F dE_X$ gilt nach Satz 7.2 für $\varphi, \psi \in K_0$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \langle W\varphi, W\psi \rangle &= \int_0^1 (G^*(\lambda)\varphi, G^*(\lambda)\psi) d\lambda = \\
 &= \int_0^1 \sum_{m=1}^M \alpha_m^2(\lambda) (\varphi, e_m^{(\lambda)})_0 (e_m^{(\lambda)}, \psi)_0 d\lambda
 \end{aligned}$$

Sei

$$(3) \quad G_m(\xi) := \begin{cases} \frac{\alpha_m(\lambda)}{\sqrt{S_m(\lambda)}} & \text{falls } \xi = \lambda + m \text{ mit } 0 \leq \lambda < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Funktionen G_m sind Elemente des Raums $L^2(\mathcal{R})$ der quadratisch Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf $\mathcal{R}$ und dort zueinander orthogonal, ebenso wie ihre Fourier-Transformierten

$$(4) \quad g_m(t) = \int e^{j2\pi t\xi} G_m(\xi) d\xi$$

Für $\varphi \in K_0 = L^2[0,1]$ ist

$$\begin{aligned}
 (\varphi, g_m(\cdot - k))_0 &= \int_0^1 \varphi(s) g_m(s - k) ds = \\
 &= \int_0^1 e^{j2\pi k\lambda} \left\{ \int_0^1 e^{-j2\pi s(\lambda+m)} \frac{\alpha_m(\lambda)}{\sqrt{S_m(\lambda)}} \varphi(s) ds \right\} d\lambda
 \end{aligned}$$

Die Zahlen $a_k^{(m)} := (\varphi, g_m(\cdot - k))_0$ sind also die Fourierkoeffizienten der Funktion

$$F_m(\varphi; \lambda) = \int_0^1 e^{-j2\pi s(\lambda+m)} \frac{\alpha_m(\lambda)}{\sqrt{S_m(\lambda)}} \varphi(s) ds$$

Ebenso sind

$$R_k^{(m)} := \langle \xi_k^{(m)}, \xi_{k+1}^{(m)} \rangle = \int_0^1 e^{j2\pi \lambda k} S_m(\lambda) d\lambda$$

die Fourierkoeffizienten der Funktion S_m und daher ist

$$c_1^{(m)} = \sum_k R_{1-k}^{(m)} a_k^{(m)} = \int_0^1 e^{j2\pi \lambda 1} S_m(\lambda) F_m(\varphi; \lambda) d\lambda$$

Die $c_1^{(m)}$ sind wieder Fourierkoeffizienten der entsprechenden Funktion unter dem Integral, so daß mit

$b_1^{(m)} = (\psi, g_{\mathbf{m}}(-1))_0$ und $\psi \in K_0$ gilt:

$$(5) \sum_{m=1}^M \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} R_{1-k}^{(m)} a_k^{(m)} \overline{b_1^{(m)}} = \int_0^1 \sum_{m=1}^M S_m(\lambda) F_m(\varphi; \lambda) \overline{F_m(\psi; \lambda)} d\lambda$$

Wie man leicht ausrechnet, ist die rechte Seite von (5) nichts anderes als $\langle W\psi, W\psi \rangle$ aus (2). Die linke Seite von (5) ist von der Form

$$\langle (\varphi, w_0)_0, (\psi, w_0)_0 \rangle$$

mit $w_0(t) = \sum_{m=1}^M \sum_{k \in \mathbb{Z}} J_k^{(m)} g_m(t-k)$, wobei diese Summe im Tensorprodukt der Räume L^2 und K_0 konvergiert, d.h. im Raum $L^2(\Omega \times [0,1], \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}, P \otimes d\lambda)$ liegt, wobei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ der zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum und $d\lambda$ das Lebesguesche Maß auf den Borelschen Mengen $\mathcal{B}$ des Intervalls $[0,1]$ ist.

Vergleicht man dieses w_0 mit der Definition des Sendesignals in (1.3), so erhält man: Die optimalen Signalformen $g_m(t)$ bei globaler Beschränkung ergeben sich als die Fourier-Transformierten der Funktionen $G_m(j)$ aus (3). Sie liegen im Raum $L^2(\mathcal{R})$ und sind dort paarweise orthogonal zueinander.

Ein entsprechendes Ergebnis erhält man auch in dem Fall, daß die Spektraldichten $S_m(\lambda), s(j)$ nicht den geforderten Ungleichungen genügen. Dazu definiert man die $\mu_m(\cdot)$ in (1) durch die Ranggrößen $\hat{S}_1(\lambda) > \hat{S}_2(\lambda) > \dots > \hat{S}_M(\lambda)$ der S_m und Funktionen $s(\lambda+m_1(\lambda)) \leq \dots \leq s(\lambda+m_M(\lambda))$ mit geeigneter Auswahl von Indices $m_k(\lambda)$ und setzt dann stückweise zusammen: $G_m(\lambda+m)$ ist die Fourier-Transformierte von g_n an der Stelle $\lambda+m$, wenn $\hat{S}_m(\lambda) = S_n(\lambda)$.

Wir wollen jedoch auf diesen mehr technischen Beweis nicht mehr eingehen.

Man erhält somit das Ergebnis der Arbeit [1] auch ohne die Voraussetzung identischer Eigenwerte der Spektraldichtematrix und unter schwächeren Anforderungen an das Rauschen.

Literatur

- [1] B. Dejon, E. Hänsler: Optimal Multiplexing of
Sampled Signals on Noisy Channels
IEEE Trans.Inf.Th., Vol. IT-17, 1971, 257-262
- [2] N. Dinculeanu: Vector Measures, Berlin, Oxford 1967
- [3] N. Dunford, J.T. Schwartz: Linear Operators I,II
New York 1963
- [4] I.M. Gelfand, N.Y. Vilenkin: Les Distributions,
tome IV, Paris 1967
- [5] E. Hille, R.S. Phillips: Functional Analysis and
Semigroups, Providence 1957
- [6] V. Mandrekar, H. Salehi: The Square Integrability
of Operator-Valued Functions with Respect
to a Non-negative Operator-Valued Measure
and the Kolmogorov Isomorphism Theorem
Indiana Univ.Math.J., Vol. 20, 1970, 545-563
- [7] V. Mandrekar, H. Salehi: Subordination of Infinite-
Dimensional Stationary Stochastic Processes
Ann.Inst.Poincaré, Vol. VI, 1970, 115-130
- [8] P. Masani: Orthogonally Scattered Measures
Advances in Mathematics, Vol. 2, 1968, 61-117
- [9] R. Payen: Fonctions aléatoires du second ordre à
valeurs dans un espace de Hilbert
Ann.Inst.Poincaré, Vol. III, 1967, 323-396

- [10] M. Rosenberg: Mutual Subordination of Multivariate Stationary Processes over any Locally Compact Abelian Group
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.,
Vol. 12, 1969, 333-343

- [11] R. Schatten: Norm Ideals of Completely Continuous Operators, Berlin 1970

- [12] J.N. Welch: On the Construction of the Hilbert Space $L_{2,M}$ for an Operator Valued Measure M
in: Vector and Operator Valued Measures and Applications, D.H. Tucker and H.B. Maynard ed.,
New York 1973

- [13] N. Wiener: The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series
New York 1949

Verzeichnis der Abkürzungen

$B(x, y), B(x)$	S.29	$\mathcal{K}$	S.69
$\mathfrak{L}$	S.29	L^2	S.10
$\mathbb{C}$ Menge der komplexen Zahlen		$L(x, y)$	S.29
C_x	S.30	$L^2(\tau, S_\tau, H_1, H_2)$	S.41
χ_Δ Indikatorfunktion einer Menge Δ		$L_{C_x}^2(H_1, H_2)$	S.44
δ_{ik} Kroneckersymbol ($\delta_{ik} = 0$ falls $i \neq k$, $= 1$ falls $i = k$)		$\mathcal{L}^2(\tau, HS(H_1, H_2))$	S.41
$\tilde{D}(F, G)$	S.53	$\mathcal{L}^2(\tau, S_\tau, H_1, H_2)$	S.41
$\tilde{D}_0(F)$	S.65	M_x	S.18
$\mathcal{D}(G)$	S.70	M_N	S.23
$\mathcal{E}$	S.2	N Menge der natürlichen Zahlen 1, 2, ...	
$E(\Delta)$	S.29	$N_0 = N \cup \{0\}$	
$e^{j2\pi\lambda k}$	S.30	$NK(H_1)$	S.7
E_x	S.30	$\emptyset$ leere Menge	
$\mathcal{F}_{C_x}(H_1, H_2)$	S.34	$\mathcal{R}$ Menge der reellen Zahlen	
$\mathcal{F}(P_1, \dots, P_p; \beta_1, \dots, \beta_p)$	S.65	$\mathcal{R}_+ = \{\xi \in \mathcal{R}; \xi \geq 0\}$	
$\mathcal{F}_B$	S.66	$\operatorname{Re} z$ Realteil einer komplexen Zahl z	
$\mathcal{F}_B$	S.70	$\operatorname{Sp}(A)$	S.7
HS-Operator	S.5	T_x	S.18
$HS(H_1, H_2)$	S.6	T_N	S.23
H_0	S.70	$\mathbb{Z}$ Menge der ganzen Zahlen	
J	S.25	$\bar{z}$ Konjugierte einer komplexen Zahl z	
K, K_p, K_0	S.23		

A* Adjungierte eines
Operators A

$$(X_k) \ll (Y_k) \quad \text{S.18}$$

$$\int \text{FdE}_x \quad \text{S.45}$$

$$[F, G]_{c_x} \quad \text{S.34}$$

Spezielle innere Produkte und Normen

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \quad \text{S.10}$$

$$\| \cdot \|_{\text{HS}} \quad \text{S.5}$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{HS}} \quad \text{S.6}$$

$$\| \cdot \|_N \quad \text{S.7}$$

$$| \cdot | \quad \text{S.6}$$

$$(\cdot, \cdot)_p \quad \text{S.9}$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{c_x} \quad \text{S.34, 44}$$

$$\| \cdot \|_{c_x} \quad \text{S.35, 44}$$

Lebenslauf

Am 15. Januar 1945 wurde ich als Sohn des Bankangestellten Kurt Graef und seiner Ehefrau Frieda, geb. Fürbaß, in Schwabach (Mittelfranken) geboren.

Von 1951 bis 1955 besuchte ich die Volksschule an der Herrnstraße und anschließend das Alte Realgymnasium in München, wo ich im Juli 1964 die Reifeprüfung ablegte.

Im Wintersemester 1964/65 begann ich mit dem Studium der Mathematik an der Universität München. Dort legte ich im Juli 1967 die Diplom-Vorprüfung und im Juli 1970 die Diplom-Hauptprüfung ab.

Vom 1. August 1970 bis 30. April 1971 arbeitete ich als wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Angewandte Mathematik II der Universität Erlangen-Nürnberg. Von Mai bis November 1971 war ich im Rahmen eines Stipendienprogramms im Forschungszentrum der IBM-Frankreich in La Gaude (Alpes Maritimes) tätig. Anschließend war ich Verwalter der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten am obengenannten Institut und habe dort seit September 1973 die Stelle eines Akademischen Rats inne.

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109 (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990